

Suites et raisonnement par récurrence

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Arithmétique et géométrie / 3 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt. Calculatrice autorisée.

- (1 pt) $u_n = u_0 + n r = -4 + 1,5n$; $u_{10} = -4 + 15 = 11$.
- (1 pt) $v_n = 200 \times 0,9^n$; $v_6 = 200 \times 0,531441 = 106,2882 \approx 106,29$.
- (1 pt) (u_n) : raison $1,5 > 0$, strictement croissante, tend vers $+\infty$. (v_n) : $v_0 > 0$ et $0 < 0,9 < 1$, strictement décroissante, tend vers 0.

2 Une récurrence / 4 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 2,5 pts ; c) 1 pt.

- (0,5 pt) $u_1 = 3 + 0 + 3 = 6$; $u_2 = 6 + 2 + 3 = 11$; $u_3 = 11 + 4 + 3 = 18$.
- (2,5 pts) **Initialisation (0,5)** : $(0 + 1)^2 + 2 = 3 = u_0$. **Hérédité (1,5)** : supposons $u_n = (n + 1)^2 + 2$. Alors $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 5 = n^2 + 4n + 6 = (n + 2)^2 + 2$. C'est la formule au rang $n + 1$. **Conclusion (0,5)** : $u_n = (n + 1)^2 + 2$ pour tout n .
- (1 pt) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ pour tout n : strictement croissante. Comme $(n + 1)^2 \rightarrow +\infty$, (u_n) tend vers $+\infty$.

3 Étude complète d'une suite / 4 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 1,5 pt ; c) 1 pt ; d) 1 pt. Calculatrice autorisée.

- (0,5 pt) $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,732$; $u_2 = \sqrt{2\sqrt{3} + 3} \approx 2,543$.
- (1,5 pt) **Initialisation** : $0 \leq u_0 = 0 < 3$. **Hérédité** : supposons $0 \leq u_n < 3$. Alors $3 \leq 2u_n + 3 < 9$ et, la racine étant croissante, $\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 3$, donc $0 \leq u_{n+1} < 3$.
Conclusion : vrai pour tout n .
- (1 pt) $u_{n+1} - u_n = (u_{n+1}^2 - u_n^2) \div (u_{n+1} + u_n) = (2u_n + 3 - u_n^2) \div (\sqrt{2u_n + 3} + u_n)$, et $2u_n + 3 - u_n^2 = (3 - u_n)(1 + u_n)$. Comme $0 \leq u_n < 3$, le numérateur est > 0 et le dénominateur aussi : $u_{n+1} > u_n$, la suite est strictement croissante.
- (1 pt) Croissante et majorée par 3, (u_n) converge d'après le théorème de convergence monotone. De $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$ on tire $\ell^2 = 2\ell + 3$, soit $\ell^2 - 2\ell - 3 = (\ell - 3)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.

4 Majorée, minorée, croissante / 3 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 1 pt ; c) 0,75 pt ; d) 0,75 pt.

- a. (0,5 pt) $3 - \frac{1}{n+1} = \frac{3(n+1) - 1}{n+1} = \frac{3n+2}{n+1} = w_n$.
- b. (1 pt) $n + 1 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $3 - 1 \leq w_n < 3 : 2 \leq w_n < 3$. ($w_0 = 2$.)
- c. (0,75 pt) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.
- d. (0,75 pt) La suite est croissante et majorée par 3 : elle converge (théorème de convergence monotone). Comme $\frac{1}{n+1}$ devient aussi petit qu'on veut, w_n se rapproche de 3 : la limite est 3 (le majorant 3 est ici atteint comme limite, ce qui n'est pas automatique).

5 Un placement et un programme / 3 pts

Barème : a) 0,5 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt ; d) 0,5 pt. Calculatrice autorisée.

- a. (0,5 pt) $v_{n+1} = 1,03v_n$, $v_0 = 5\,000 : v_n = 5\,000 \times 1,03^n$.
- b. (1 pt)

```
def duree():  
    v = 5000  
    n = 0  
    while v <= 8000:  
        v = 1.03 * v  
        n = n + 1  
    return n
```

- c. (1 pt) La fonction renvoie **16**. $v_{15} = 5\,000 \times 1,03^{15} \approx 7\,789,84 \text{ €} \leq 8\,000$ et $v_{16} \approx 8\,023,54 \text{ €} > 8\,000$.
- d. (0,5 pt) La raison 1,03 est supérieure à 1 : $1,03^n \rightarrow +\infty$, donc v_n dépasse tout seuil à partir d'un certain rang et la condition « $v \leq 8000$ » finit par être fausse.

6 Bernoulli et limites / 3 pts

Barème : a) 1,5 pt ; b) 0,75 pt ; c) 0,75 pt.

- a. (1,5 pt) **Initialisation** : $1,5^0 = 1 \geq 1 + 0$. **Hérédité** : supposons $1,5^n \geq 1 + 0,5n$. Alors $1,5^{n+1} = 1,5 \times 1,5^n \geq 1,5(1 + 0,5n) = 1,5 + 0,75n \geq 1,5 + 0,5n = 1 + 0,5(n+1)$, car $0,75n \geq 0,5n$ pour $n \geq 0$. **Conclusion** : l'inégalité est vraie pour tout n .
- b. (0,75 pt) Pour tout réel A , $1 + 0,5n > A$ dès que $n > 2(A - 1)$. Donc $1,5^n > A$ à partir de ce rang : $1,5^n$ tend vers $+\infty$.
- c. (0,75 pt) $(\frac{2}{3})^n = 1 \div 1,5^n$, car $1,5 = \frac{3}{2}$. Comme $1,5^n$ devient arbitrairement grand et positif, son inverse devient arbitrairement proche de 0 : $(\frac{2}{3})^n$ tend vers 0.

0.