

Suites et raisonnement par récurrence

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Premiers termes ★★★

- $u_1 = 2 \times 3 - 5 = 1$; $u_2 = 2 \times 1 - 5 = -3$; $u_3 = 2 \times (-3) - 5 = -11$; $u_4 = 2 \times (-11) - 5 = -27$.
- Les termes 3, 1, -3, -11, -27 diminuent : on conjecture que la suite est **décroissante**. Mais ce n'est qu'une conjecture : cinq termes ne prouvent rien sur tous les termes. Il faudra le démontrer (par exemple par récurrence).

2 Ni croissante, ni décroissante ★★★

- $u_0 = 2$; $u_1 = 1 - 6 + 2 = -3$; $u_2 = 4 - 12 + 2 = -6$; $u_3 = 9 - 18 + 2 = -7$; $u_4 = 16 - 24 + 2 = -6$; $u_5 = 25 - 30 + 2 = -3$.
- $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 6(n+1) + 2] - [n^2 - 6n + 2] = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 2 - n^2 + 6n - 2 = 2n - 5$.
- $2n - 5 < 0$ pour $n \leq 2$ (car alors $2n \leq 4$) et $2n - 5 > 0$ pour $n \geq 3$ (car $2n \geq 6$). La suite décroît strictement de u_0 à u_3 , puis croît strictement à partir de u_3 . Elle n'est donc **ni croissante ni décroissante** ; son plus petit terme est $u_3 = -7$.

3 Une suite arithmétique ★★★

- $u_n = u_0 + n r = 7 - 3n$; $u_{20} = 7 - 60 = -53$.
- La raison -3 est négative : la suite est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.
- $7 - 3n < -100 \Leftrightarrow 3n > 107 \Leftrightarrow n > \mathbf{107/3} \approx 35,67$. Le plus petit entier est $n = 36$: $u_{36} = 7 - 108 = -101 < -100$, alors que $u_{35} = 7 - 105 = -98$.

4 Une suite géométrique ★★★

- $v_1 = 5 \times 0,8 = 4$; $v_2 = 4 \times 0,8 = 3,2$; $v_5 = 5 \times 0,8^5 = 5 \times 0,32768 = 1,6384$.
- Ici $v_0 > 0$ et $0 < 0,8 < 1$: la suite est strictement décroissante, et comme $0,8^n \rightarrow 0$, (v_n) tend vers 0.
- On teste : $v_{17} = 5 \times 0,8^{17} \approx 0,1126 > 0,1$ et $v_{18} = 5 \times 0,8^{18} \approx 0,0901 < 0,1$. Comme la suite est décroissante, le plus petit rang est $n = 18$.

5 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Vrai.** Si (u_n) est croissante, $u_n \geq u_0$ pour tout n : u_0 est un minorant.
- b. **Faux.** $u_n = (-1)^n$ est majorée par 1 mais n'est pas décroissante : $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. Contre-exemple aussi : $u_n = -1/n+1$, majorée par 0 et croissante.
- c. **Vrai.** Pour tout n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$: la suite est minorée par -1 et majorée par 1.
- d. **Faux.** $u_n = 1 - 1/n+1$ est croissante ($u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)(n+2) > 0$) mais reste inférieure à 1 : elle ne peut pas tendre vers $+\infty$.

6 Encadrer une suite ★★★

- a. $2 - 1/n+1 = 2(n+1) - 1/n+1 = 2n+1/n+1 = u_n$.
- b. Pour tout n , $n + 1 \geq 1$ donc $0 < 1/n+1 \leq 1$. Donc $2 - 1 \leq 2 - 1/n+1 < 2$, soit $1 \leq u_n < 2$. ($u_0 = 1$ est le minimum.)
- c. $u_{n+1} - u_n = 1/n+1 - 1/n+2 = 1/(n+1)(n+2) > 0$. La suite est strictement croissante.

7 Une première récurrence ★★★

Initialisation : $3 \times 0 + 2 = 2 = u_0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit n un entier tel que $u_n = 3n + 2$. Alors $u_{n+1} = u_n + 3 = 3n + 2 + 3 = 3(n + 1) + 2$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, $u_n = 3n + 2$ pour tout entier n . (On reconnaît une suite arithmétique de raison 3.)

8 Somme des entiers impairs ★★★

Initialisation ($n = 1$) : le membre de gauche vaut 1 et $1^2 = 1$. Vrai.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Alors $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : elle est vraie pour tout $n \geq 1$. (Vérification : $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.)

9 Divisibilité ★★★

Initialisation : $6^0 - 1 = 0 = 5 \times 0$, multiple de 5.

Hérédité : soit n tel que $6^n - 1 = 5k$ avec k entier, c'est-à-dire $6^n = 5k + 1$. Alors $6^{n+1} - 1 = 6 \times 6^n - 1 = 6(5k + 1) - 1 = 30k + 5 = 5(6k + 1)$, avec $6k + 1$ entier. C'est un multiple de 5.

Conclusion : pour tout entier n , $6^n - 1$ est un multiple de 5. ($6^1 - 1 = 5$; $6^2 - 1 = 35$; $6^3 - 1 = 215$.)

10 Une suite avec racine carrée ★★★

- a. $u_1 = \sqrt{3} \approx 1,732$; $u_2 = \sqrt{\sqrt{3} + 2} \approx 1,932$.
- b. **Initialisation :** $0 < u_0 = 1 < 2$. **Hérédité :** supposons $0 < u_n < 2$. Alors $2 < u_n + 2 < 4$. La racine carrée étant croissante, $\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$, donc $0 < u_{n+1} < 2$.
Conclusion : $0 < u_n < 2$ pour tout n .
- c. On multiplie et divise par la quantité conjuguée : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = (u_n + 2 - u_n^2) \div (\sqrt{u_n + 2} + u_n)$. Le numérateur est $2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n)$ (on développe : $2 + 2u_n - u_n - u_n^2$). Comme $0 < u_n < 2$, ce numérateur est > 0 ; le dénominateur aussi. Donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.
- d. La suite est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ . Cette limite vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, donc $\ell^2 = \ell + 2$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell > 0$, $\ell = 2$.

11 Majorée, croissante, convergente ★★★

- a. $u_1 = 2$; $u_2 = 0,6 \times 2 + 2 = 3,2$; $u_3 = 0,6 \times 3,2 + 2 = 3,92$; $u_4 = 0,6 \times 3,92 + 2 = 4,352$.
- b. **Initialisation :** $u_0 = 0 \leq 5$. **Hérédité :** si $u_n \leq 5$, alors $0,6u_n \leq 3$ (on multiplie par $0,6 > 0$) et $u_{n+1} = 0,6u_n + 2 \leq 5$. **Conclusion :** $u_n \leq 5$ pour tout n .
- c. $u_{n+1} - u_n = 2 - 0,4u_n$. Or $u_n \leq 5$ donc $0,4u_n \leq 2$, d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite est croissante.
- d. Croissante et majorée par 5, (u_n) converge (théorème de convergence monotone). Sa limite vérifie $\ell = 0,6\ell + 2$, donc $0,4\ell = 2$ et $\ell = 5$.
- e. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,6u_n - 3 = 0,6(u_n - 5) = 0,6v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6 et $v_0 = -5$. Ainsi $v_n = -5 \times 0,6^n$ et $u_n = 5 - 5 \times 0,6^n$. (Contrôle : $u_1 = 5 - 3 = 2$; $u_2 = 5 - 1,8 = 3,2$.) Comme $0,6^n \rightarrow 0$, on retrouve $\ell = 5$.

12 Variation par le quotient ★★★

- a. $u_0 = 1$; $u_1 = 3 \div 2 = 1,5$; $u_2 = 9 \div 3 = 3$; $u_3 = 27 \div 4 = 6,75$.
- b. $3^n > 0$ et $n + 1 > 0$, donc $u_n > 0$. Ensuite $u_{n+1} \div u_n = (3^{n+1} \div (n + 2)) \times ((n + 1) \div 3^n) = 3(n+1)/n+2$.
- c. $3(n+1)/n+2 > 1 \Leftrightarrow 3n + 3 > n + 2$ (car $n + 2 > 0$) $\Leftrightarrow 2n > -1$, ce qui est vrai pour tout entier n . Le quotient est > 1 et les termes sont positifs : $u_{n+1} > u_n$. La suite est strictement croissante, donc minorée par son premier terme $u_0 = 1$.

13 Chercher un seuil ★★★

- a. Chaque année, le capital est multiplié par 1,05 : $v_{n+1} = 1,05v_n$, avec $v_0 = 1\,000$. La

suite est géométrique de raison 1,05 et $v_n = 1\,000 \times 1,05^n$.

b. Programme possible :

```
def annees():  
    v = 1000  
    n = 0  
    while v <= 1500:  
        v = 1.05 * v  
        n = n + 1  
    return n
```

c. La fonction renvoie **9**. Vérification : $v_8 = 1\,000 \times 1,05^8 \approx 1\,477,46 \text{ €} \leq 1\,500$ et $v_9 \approx 1\,551,33 \text{ €} > 1\,500$. Le capital dépasse donc 1 500 € au bout de 9 ans (la suite étant croissante, il reste au-dessus ensuite).

14 Une inégalité par récurrence ★★★

Initialisation ($n = 5$) : $2^5 = 32$ et $5^2 = 25$. Comme $32 > 25$, la propriété est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 5$ tel que $2^n > n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$. Montrons que $2n^2 \geq (n+1)^2$: $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 16 - 2 > 0$ car $n-1 \geq 4$. Donc $2^{n+1} > 2n^2 \geq (n+1)^2$.

Conclusion : $2^n > n^2$ pour tout $n \geq 5$. (Attention : la propriété est fausse pour $n = 3$, car $8 < 9$, et pour $n = 4$, car $16 = 16$.)

15 Deviner puis prouver ★★★

a. $u_1 = 1 \div (1 + 1) = \mathbf{1/2}$; $u_2 = \mathbf{1/2} \div (1 + \mathbf{1/2}) = \mathbf{1/2} \div \mathbf{3/2} = \mathbf{1/3}$; $u_3 = \mathbf{1/3} \div \mathbf{4/3} = \mathbf{1/4}$. On conjecture $u_n = \mathbf{1/n+1}$.

b. **Initialisation** : $\mathbf{1/0+1} = 1 = u_0$. **Hérédité** : supposons $u_n = \mathbf{1/n+1}$. Alors $u_{n+1} = \mathbf{1/n+1} \div (1 + \mathbf{1/n+1})$. On multiplie numérateur et dénominateur par $n + 1$: $u_{n+1} = 1 \div (n + 1 + 1) = \mathbf{1/n+2}$. C'est la formule au rang $n + 1$. **Conclusion** : $u_n = \mathbf{1/n+1}$ pour tout n .

c. $u_{n+1} - u_n = \mathbf{1/n+2} - \mathbf{1/n+1} = \mathbf{-1/(n+1)(n+2)} < 0$: la suite est strictement décroissante. Elle est minorée par 0 (termes positifs) donc converge ; comme $\mathbf{1/n+1}$ devient aussi petit qu'on veut, sa limite est 0.

16 Suite arithmético-géométrique ★★★

a. $u_1 = 15 - 4 = 11$; $u_2 = 33 - 4 = 29$.

b. $\ell = 3\ell - 4 \Leftrightarrow 2\ell = 4 \Leftrightarrow \ell = 2$. Posons $w_n = u_n - 2$. Alors $w_{n+1} = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison 3, de premier terme w_0

$$= 5 - 2 = 3.$$

- c. $w_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$, donc $u_n = 2 + 3^{n+1}$. Vérification : $u_2 = 2 + 3^3 = 29 \checkmark$.
- d. $u_{n+1} - u_n = 3^{n+2} - 3^{n+1} = 2 \times 3^{n+1} > 0$: strictement croissante. Comme $3 > 1$, $3^{n+1} \rightarrow +\infty$ (Bernoulli), donc (u_n) tend vers $+\infty$.
- e. $u_n > 10^6 \Leftrightarrow 3^{n+1} > 999\,998$. Or $3^{12} = 531\,441$ et $3^{13} = 1\,594\,323$. Il faut donc $n + 1 \geq 13$, soit $n = 12$. Contrôle : $u_{11} = 531\,443 < 10^6$ et $u_{12} = 1\,594\,325 > 10^6$.

17 Un abonnement ★★★

- a. Après désinscriptions, il reste 85 % des abonnés : $0,85u_n$, puis on ajoute 300 : $u_{n+1} = 0,85u_n + 300$. $u_1 = 0,85 \times 1\,200 + 300 = 1\,320$; $u_2 = 0,85 \times 1\,320 + 300 = 1\,422$.
- b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0,85u_n - 1\,700 = 0,85(u_n - 2\,000) = 0,85v_n$. (v_n) est géométrique de raison 0,85, $v_0 = -800$. Donc $v_n = -800 \times 0,85^n$ et $u_n = 2\,000 - 800 \times 0,85^n$. (Contrôle : $u_1 = 2\,000 - 680 = 1\,320 \checkmark$.)
- c. $u_{n+1} - u_n = -800 \times 0,85^n \times (0,85 - 1) = 120 \times 0,85^n > 0$: la suite est strictement croissante. Pour tout n , $800 \times 0,85^n > 0$, donc $u_n < 2\,000$: elle est majorée par 2 000. Comme $0,85^n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow 2\,000$: le nombre d'abonnés se stabilise vers 2 000 sans jamais l'atteindre.
- d. $u_n > 1\,900 \Leftrightarrow 800 \times 0,85^n < 100 \Leftrightarrow 0,85^n < 0,125$. À la calculatrice : $u_{12} \approx 1\,886,2 < 1\,900$ et $u_{13} \approx 1\,903,3 > 1\,900$. La suite étant croissante, c'est vrai dès $n = 13$, c'est-à-dire au 1er janvier 2039.

18 Une suite qui se rapproche de 1 ★★★

- a. $u_1 = 0,5 \times 1,5 = 0,75$; $u_2 = 0,75 \times 1,25 = 0,9375$. Et $1 - (1 - u_n)^2 = 1 - 1 + 2u_n - u_n^2 = u_n(2 - u_n) \checkmark$.
- b. **Initialisation** : $0 < 0,5 < 1$. **Hérédité** : supposons $0 < u_n < 1$. Alors $0 < 1 - u_n < 1$, donc $0 < (1 - u_n)^2 < 1$ (le carré conserve l'ordre sur les positifs), puis $0 < 1 - (1 - u_n)^2 < 1$. C'est $0 < u_{n+1} < 1$. **Conclusion** : vrai pour tout n .
- c. $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n) > 0$ car $0 < u_n < 1$. La suite est strictement croissante.
- d. Croissante et majorée par 1 : elle converge vers ℓ . De $\ell = \ell(2 - \ell)$, on tire $\ell(1 - \ell) = 0$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or $u_n \geq u_0 = 0,5$ pour tout n (croissance), donc $\ell \geq 0,5$: $\ell = 1$.

19 Somme des carrés ★★★

Initialisation ($n = 1$) : $1^2 = 1$ et $1 \times 2 \times 3 / 6 = 1$.

Hérédité : supposons $1^2 + \dots + n^2 = \mathbf{n(n+1)(2n+1)/6}$. Alors la somme jusqu'à $n + 1$ vaut $\mathbf{n(n+1)(2n+1)/6} + (n + 1)^2 = (n + 1) \times \mathbf{n(2n+1) + 6(n+1)/6} = (n + 1) \times \mathbf{2n^2 + 7n + 6/6}$. Comme $2n^2 + 7n + 6 = (n + 2)(2n + 3)$, on obtient $\mathbf{(n+1)(n+2)(2n+3)/6}$,

qui est la formule au rang $n + 1$ (car $2(n + 1) + 1 = 2n + 3$).

Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 20$: $20 \times 21 \times 41/6 = 17220/6 = 2\,870$.

20 Que fait ce programme ? ★★★

- Tableau (valeurs de u et n à chaque tour) : $n = 0 : 1$; $n = 1 : 2,5$; $n = 2 : 4,75$; $n = 3 : 8,125$; $n = 4 : 13,1875$; $n = 5 : 20,78125$. À $n = 5$, $u = 20,78 \geq 20$: la condition « $u < 20$ » devient fausse, la boucle s'arrête. *mystere(20)* renvoie **5**.
- Le nombre renvoyé est le **plus petit rang n tel que $u_n \geq S$** (le premier terme qui atteint ou dépasse le seuil S).
- $u_{n+1} + 2 = 1,5u_n + 3 = 1,5(u_n + 2)$. La suite $(u_n + 2)$ est géométrique de raison $1,5$ et de premier terme 3 : $u_n = 3 \times 1,5^n - 2$. (Contrôle : $u_1 = 4,5 - 2 = 2,5 \checkmark$.)
Comme $1,5 > 1$, $1,5^n \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow +\infty$: tout seuil S finit par être dépassé, et la boucle s'arrête.
- $u_n \geq 100 \Leftrightarrow 3 \times 1,5^n \geq 102 \Leftrightarrow 1,5^n \geq 34$. On calcule $1,5^8 \approx 25,6 < 34$ et $1,5^9 \approx 38,4 \geq 34$. Donc $n = 9$ ($u_9 = 113,33... \geq 100$ et $u_8 \approx 74,89 < 100$). C'est ce que renvoie *mystere(100)*.

21 Une suite qui tend vers $+\infty$ sans formule ★★★

- $u_1 = 1 + 1 = 2$; $u_2 = 2 + 0,5 = 2,5$; $u_3 = 2,5 + 0,4 = 2,9$.
- Initialisation :** $u_0 = 1 > 0$. **Hérédité :** si $u_n > 0$, alors $1 \div u_n > 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1 \div u_n > 0$. **Conclusion :** $u_n > 0$ pour tout n .
- $u_{n+1} - u_n = 1 \div u_n > 0$ d'après la question précédente. La suite est strictement croissante.
- Initialisation :** $u_0^2 = 1 \geq 2 \times 0 + 1$. **Hérédité :** supposons $u_n^2 \geq 2n + 1$. Alors $u_{n+1}^2 = (u_n + 1 \div u_n)^2 = u_n^2 + 2 + 1 \div u_n^2 \geq u_n^2 + 2 \geq 2n + 1 + 2 = 2(n + 1) + 1$.
Conclusion : $u_n^2 \geq 2n + 1$ pour tout n .
- Comme $u_n > 0$, $u_n \geq \sqrt{2n + 1}$. Or $\sqrt{2n + 1}$ devient aussi grand qu'on veut (pour tout réel $A > 0$, il dépasse A dès que $2n + 1 > A^2$). La suite (u_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$: elle tend vers $+\infty$ (théorème de comparaison). (On peut aussi dire : croissante, et si elle était majorée elle convergerait, ce qui contredit $u_n^2 \geq 2n + 1$.)