

Suites et raisonnement par récurrence

Cours de maths - Terminale

Les suites servent à décrire des phénomènes qui évoluent pas à pas : un capital qui grandit chaque année, une population qui se renouvelle, un programme qui répète un calcul. En Terminale, tu ne te contentes plus de calculer les premiers termes : tu apprends à **démontrer** une propriété vraie pour **tous** les entiers, grâce au **raisonnement par récurrence**, puis à étudier le **sens de variation** et le **comportement à l'infini** d'une suite. Tu découvriras aussi comment un petit programme Python explore une suite.

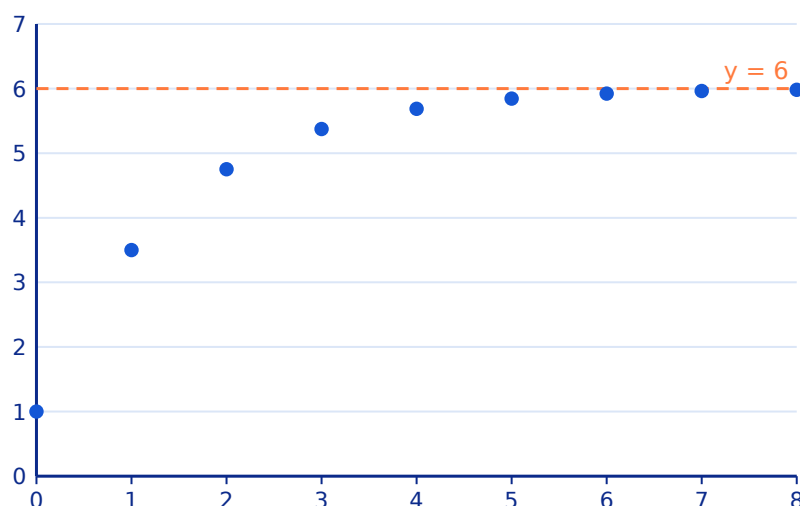
1. Rappels : définir une suite

Suite numérique Une **suite** (u_n) associe à chaque entier naturel n (à partir d'un rang initial, souvent 0) un réel u_n , appelé **terme de rang n** . Attention : u_{n+1} est le terme suivant, alors que $u_n + 1$ est le terme u_n augmenté de 1.

Il y a deux façons usuelles de définir une suite :

- **Forme explicite** : $u_n = f(n)$. Exemple : $u_n = 3n - 2$. On calcule directement n'importe quel terme : $u_{10} = 28$.
- **Relation de récurrence** : on donne u_0 et une règle qui fabrique u_{n+1} à partir de u_n . Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$. Pour atteindre u_{50} , il faut en principe calculer tous les termes précédents.

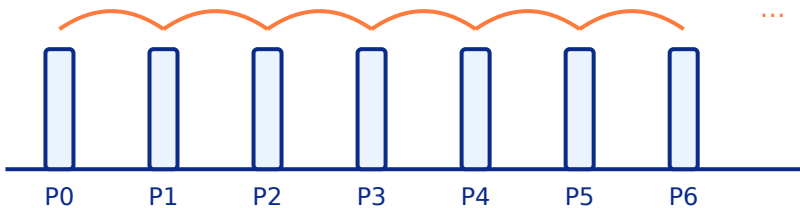
Exemple Avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$: $u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$; $u_2 = 0,5 \times 3,5 + 3 = 4,75$; $u_3 = 0,5 \times 4,75 + 3 = 5,375$. Les termes grandissent mais semblent ralentir. Ce sera notre fil conducteur.



Suites arithmétique et géométrique Une suite est **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n ; alors $u_n = u_0 + n r$. Elle est **géométrique** de raison q si $u_{n+1} = q u_n$ pour tout n ; alors $u_n = u_0 \times q^n$.

Le problème : comment prouver une formule comme « $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$ » pour tous les entiers à la fois ? Vérifier cent valeurs ne prouve rien pour la cent-unième. Il faut un outil de démonstration : c'est la récurrence.

2. Le raisonnement par récurrence



Imagine une longue rangée de dominos. Si le premier tombe, et si **chaque domino qui tombe fait tomber le suivant**, alors tous les dominos tombent. Le raisonnement par récurrence suit exactement cette idée.

Principe de récurrence Soit P_n une propriété qui dépend d'un entier $n \geq n_0$. Si :

- **Initialisation** : P_{n_0} est vraie ;
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,

alors P_n est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.

Méthode : rédiger une récurrence

1. Énoncer clairement la propriété P_n à démontrer (c'est une phrase complète, avec « = », « $\leq$ »...).
2. **Initialisation** : vérifier P au premier rang (en général $n = 0$) en calculant les deux côtés.
3. **Hérédité** : fixer un entier n quelconque, **supposer** P_n vraie (c'est l'*hypothèse de récurrence*), puis en déduire P_{n+1} en utilisant la définition de la suite et l'hypothèse.
4. **Conclusion** : « D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier $n \geq \dots$ ».

Exemple résolu Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Démontrons que $u_n = 2 \times 3^n - 1$ pour tout entier n .

Propriété P_n : « $u_n = 2 \times 3^n - 1$ ».

Initialisation : $2 \times 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1 = u_0$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit n un entier tel que P_n est vraie : $u_n = 2 \times 3^n - 1$. Alors $u_{n+1} = 3u_n + 2 =$

$3(2 \times 3^n - 1) + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 3 + 2 = 2 \times 3^{n+1} - 1$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $u_n = 2 \times 3^n - 1$ pour tout entier n .

(Contrôle : $u_1 = 5$ et $2 \times 3 - 1 = 5$; $u_2 = 17$ et $2 \times 9 - 1 = 17$.)

Trois pièges classiques

- **Oublier l'initialisation** : « $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ » seule ne prouve rien. La propriété « 2^n est négatif » est héréditaire... mais fausse dès le début !
- **Écrire l'hérédité en supposant ce qu'on veut démontrer** : on suppose P_n (rang n), jamais P_{n+1} .
- **Ne pas utiliser l'hypothèse de récurrence** : si ta preuve de l'hérédité ne s'en sert pas, c'est qu'une récurrence est inutile ou que tu t'es trompé.

3. Récurrence : trois grands usages

a) Prouver une formule explicite. C'est l'exemple précédent. Cela marche aussi pour des sommes.

Somme des premiers entiers Pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + \dots + n = \mathbf{n(n+1)/2}$.

Démonstration. Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et $\mathbf{1 \times 2 / 2 = 1}$.

Hérédité : si $1 + \dots + n = \mathbf{n(n+1)/2}$, alors $1 + \dots + n + (n + 1) = \mathbf{n(n+1)/2} + (n + 1) = (n + 1)(\mathbf{n/2} + 1) = \mathbf{(n+1)(n+2)/2}$, ce qui est la formule au rang $n + 1$.

b) Prouver une inégalité ou un encadrement. On montre par exemple que tous les termes restent sous une valeur donnée.

Exemple Pour $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$, montrons que $u_n \leq 6$ pour tout n .

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 6$.

Hérédité : supposons $u_n \leq 6$. En multipliant par $0,5 > 0$: $0,5u_n \leq 3$, puis en ajoutant 3 : $u_{n+1} \leq 6$.

Conclusion : $u_n \leq 6$ pour tout entier n .

c) Prouver une divisibilité. Montrons que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier n . Pour $n = 0$: $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$. Si $4^n - 1 = 3k$ avec k entier, alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$, multiple de 3. La propriété est donc vraie pour tout n .

Inégalité de Bernoulli Pour tout réel $a \geq 0$ et tout entier n : $(1 + a)^n \geq 1 + n a$.

Démonstration. Initialisation : $(1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0$. Hérédité : supposons $(1 + a)^n \geq 1 + n a$. Comme $1 + a > 0$, $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + n a)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + n a^2 \geq 1 + (n + 1)a$, car $n a^2 \geq 0$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

4. Sens de variation d'une suite

Suite monotone La suite (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n , **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n . Elle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante. On parle de variation **stricte** avec $>$ ou $<$. Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante, comme $u_n = (-1)^n$.

Quatre méthodes pour étudier la variation

1. **Signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ (la plus courante).
2. **Comparaison à 1 du quotient** $u_{n+1} \div u_n$, seulement si tous les termes sont strictement positifs : quotient $\geq 1 \Rightarrow$ croissante, quotient $\leq 1 \Rightarrow$ décroissante.
3. **Fonction** : si $u_n = f(n)$ et si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est croissante (idem décroissante). Cela ne marche *pas* pour $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. **Récurrence** : on démontre « $u_{n+1} \geq u_n$ » par récurrence, en particulier pour les suites définies par récurrence.

Exemple 1 : la différence Soit $u_n = 2n/(n+3)$. Alors $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)/(n+4) - 2n/(n+3) = 2(n+1)(n+3) - 2n(n+4)/(n+3)(n+4) = 6/(n+3)(n+4) > 0$. La suite est strictement croissante.

Exemple 2 : le quotient Soit $v_n = n+1/2^n$ pour $n \geq 1$ (tous les termes sont > 0). Alors $v_{n+1} \div v_n = (n+2)/2(n+1)$. Or $n+2 < 2n+2$ dès que $n > 0$, donc le quotient est inférieur à 1 : la suite est strictement décroissante. ($v_1 = 1$, $v_2 = 0,75$, $v_3 = 0,5$.)

Exemple 3 : la récurrence Pour $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$, on a $u_{n+1} - u_n = 3 - 0,5u_n$. Comme $u_n \leq 6$ (démontré plus haut), $0,5u_n \leq 3$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite est croissante.

Piège Pour une suite, on compare des termes *consécutifs* : u_{n+1} et u_n . Il ne suffit pas de calculer u_0, u_1, u_2 et de constater qu'ils augmentent : c'est une conjecture, pas une preuve. Exemple : $u_n = n^2 - 6n + 2$ décroît d'abord, puis croît.

5. Suites majorées, minorées, bornées

Majorant, minorant La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; M est un **majorant**. Elle est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n . Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire $m \leq u_n \leq M$.

Un majorant n'est pas unique : si 6 majore une suite, 7 et 100 aussi. Cela ne veut pas dire que la suite atteint 6 ni qu'elle s'en approche.

Exemple Soit $u_n = 3 - 2/(n+1)$. Pour tout n : $2/(n+1) > 0$, donc $u_n < 3$: la suite est majorée par 3. Comme $n+1 \geq 1$, $2/(n+1) \leq 2$, donc $u_n \geq 1$: la suite est minorée par 1.

Elle est bornée : $1 \leq u_n < 3$. ($u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_3 = 2,5$.)

Comment démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

- **Directement** : on encadre l'expression de u_n (inégalités successives sur $n \geq 0$).
- **Par récurrence** pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$: on montre que $u_n \leq M$ est héréditaire, comme dans l'exemple de la partie 3.
- **Par la monotonie** : une suite croissante est minorée par u_0 ; une suite décroissante est majorée par u_0 .

Piège Une suite peut être bornée sans être monotone ($u_n = (-1)^n$ prend les valeurs -1 et 1 en alternance) et monotone sans être bornée ($u_n = n$ est croissante, minorée par 0 , mais non majorée).

6. Suites arithmétiques et géométriques : variations et comportement

Pour une suite arithmétique de raison r , on a $u_{n+1} - u_n = r$: le signe de r donne tout de suite la variation. Pour une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$, le quotient $u_{n+1} \div u_n$ vaut q .

Suite	Condition	Variation	Comportement quand n devient grand
Arithmétique	$r > 0$	strictement croissante	tend vers $+\infty$
Arithmétique	$r < 0$	strictement décroissante	tend vers $-\infty$
Arithmétique	$r = 0$	constante	constante
Géométrique ($u_0 > 0$)	$q > 1$	strictement croissante	tend vers $+\infty$
Géométrique ($u_0 > 0$)	$q = 1$	constante	constante
Géométrique ($u_0 > 0$)	$0 < q < 1$	strictement décroissante	tend vers 0
Géométrique	$-1 < q < 0$	ni croissante ni décroissante	tend vers 0 (signes alternés)
Géométrique	$q \leq -1$	ni croissante ni décroissante	pas de limite

Si $u_0 < 0$, les variations d'une suite géométrique de raison $q > 0$ sont inversées. Les comportements de q^n se justifient grâce à l'inégalité de Bernoulli.

Limite de q^n pour $q > 1$ Si $q > 1$, alors q^n devient aussi grand qu'on veut : pour tout réel A , $q^n > A$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Posons $a = q - 1 > 0$. D'après Bernoulli, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + n a$. Or 1

+ $na > A$ dès que $n > \mathbf{A-1/a}$. Donc, à partir de ce rang, $q^n > A$.

Si $0 < q < 1$, alors $\mathbf{1/q} > 1$, donc $(\mathbf{1/q})^n$ devient immense, et son inverse q^n se rapproche de 0 : $q^n \rightarrow 0$.

Exemple : retour à notre suite Posons $w_n = u_n - 6$ avec $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$. Alors $w_{n+1} = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $w_0 = 1 - 6 = -5$. Donc $w_n = -5 \times 0,5^n$ et $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$. Comme $0,5^n \rightarrow 0$, les termes u_n s'approchent de 6 par valeurs inférieures.
Vérification : $u_3 = 6 - 5 \times 0,125 = 5,375$.

Astuce de Mathbot Quand une suite vérifie $u_{n+1} = au_n + b$, cherche le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. Ensuite, la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a . Ici : $\ell = 0,5\ell + 3$ donne $\ell = 6$. Un bon réflexe à retenir !

7. Suites monotones et convergence

Dire qu'une suite **converge** vers un réel ℓ signifie, intuitivement, que ses termes se rapprochent de ℓ autant qu'on le veut, à partir d'un certain rang. Dire qu'elle **tend vers $+\infty$** signifie qu'elle dépasse n'importe quel réel fixé à partir d'un certain rang. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Théorème de la convergence monotone (admis)

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Suite croissante non majorée Toute suite croissante et **non majorée** tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Comme la suite n'est pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un entier N tel que $u_N > A$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$. Donc $u_n > A$ à partir du rang N .

Ce que le théorème ne dit pas Une suite croissante majorée par 6 converge, mais pas forcément vers 6. Par exemple $u_n = 1 - \mathbf{1/(n+1)}$ est croissante, majorée par 5 et par 1, et converge vers 1. Le théorème donne l'*existence* d'une limite, pas sa valeur.

Méthode : une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Conjecturer avec les premiers termes (calculatrice, tableur ou Python).
2. Démontrer par récurrence un encadrement (majoration, minoration).
3. Étudier le sens de variation (différence $u_{n+1} - u_n$).
4. Conclure avec le théorème de convergence monotone.
5. Si f est continue, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ (résultat admis) : on résout cette équation et on garde la solution compatible avec l'encadrement.

Notre suite ($u_0 = 1$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$) est croissante et majorée par 6 : elle converge. Elle vérifie $l = 0,5l + 3$, donc $l = 6$. On retrouve bien le résultat de la partie 6.

8. Explorer une suite avec Python

Un programme permet de calculer un terme éloigné ou de chercher à partir de quel rang un seuil est franchi.

```
def terme(n):  
    u = 1  
    for k in range(n):  
        u = 0.5 * u + 3  
    return u  
  
def seuil(S):  
    u = 1  
    n = 0  
    while u < S:  
        u = 0.5 * u + 3  
        n = n + 1  
    return n
```

La fonction terme(n) part de $u_0 = 1$ et répète n fois l'instruction $u = 0.5 * u + 3$; elle renvoie u_n . **La fonction seuil(S)** utilise une boucle *while* : tant que $u_n < S$, on passe au terme suivant et on compte une étape. Elle renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geq S$.

Par exemple, *seuil(5.99)* renvoie 9 : en effet $u_9 = 6 - 5 \times 0,5^9 \approx 5,9902 \geq 5,99$, alors que $u_8 = 6 - 5 \times 0,5^8 \approx 5,9805 < 5,99$.

Pièges des algorithmes

- **Boucle infinie** : *seuil(6)* ne se termine jamais, car $u_n < 6$ pour tout n . Un seuil doit être atteignable.
- **Décalage d'un rang** : vérifie la valeur de n renvoyée en testant deux termes consécutifs à la main.
- **Un programme ne démontre rien** : il donne une conjecture, qu'on prouve ensuite par le calcul.

Chercher un seuil pour une suite qui diverge Pour $v_n = 200 \times 1,05^n$, on cherche le premier rang tel que $v_n > 1\,000$. Une boucle *while* $v \leq 1000$ multiplie v par 1,05 jusqu'à dépasser 1 000. On trouve $n = 33$ (car $200 \times 1,05^{32} \approx 953,0$ et $200 \times 1,05^{33} \approx 1\,000,6$). Comme (v_n) est croissante, la condition reste vraie ensuite.

À retenir

- **Récurrence** : initialisation + hérédité (on suppose P_n et on démontre P_{n+1}) + conclusion écrite.
- Pour étudier le sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$, quotient comparé à 1 (termes > 0), fonction croissante pour $u_n = f(n)$, ou récurrence.
- Majorée : $u_n \leq M$; minorée : $u_n \geq m$; bornée : les deux. Une suite croissante est minorée par u_0 .
- Arithmétique de raison r : croissante si $r > 0$ (vers $+\infty$), décroissante si $r < 0$ (vers $-\infty$).
- Géométrique de raison q : $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$; $q^n \rightarrow 0$ si $-1 < q < 1$; pas de limite si $q \leq -1$.
- Inégalité de Bernoulli : $(1 + a)^n \geq 1 + n a$ pour $a \geq 0$.
- Théorème de la convergence monotone (admis) : croissante majorée $\Rightarrow$ convergente ; décroissante minorée $\Rightarrow$ convergente. Croissante non majorée $\Rightarrow$ tend vers $+\infty$.
- Pour $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$), poser $\ell = \frac{b}{1-a}$: la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a .
- Python : *for* pour calculer un terme, *while* pour chercher un seuil ; attention aux boucles infinies.