

Suites et raisonnement par récurrence

Exercices de maths - Terminale

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Premiers termes ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

- Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- Que peux-tu conjecturer sur le sens de variation de la suite ? Peut-on l'affirmer avec ces seuls calculs ?

2 Ni croissante, ni décroissante ★★★

Soit $u_n = n^2 - 6n + 2$ pour tout entier n .

- Calcule $u_0, u_1, \dots, u_5$.
- Montre que $u_{n+1} - u_n = 2n - 5$.
- Étudie le signe de $2n - 5$ pour n entier et conclus sur les variations de la suite.

3 Une suite arithmétique ★★★

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -3 .

- Exprime u_n en fonction de n et calcule u_{20} .
- Donne le sens de variation de (u_n) et sa limite.
- Détermine le plus petit entier n tel que $u_n < -100$.

4 Une suite géométrique ★★★

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $0,8$.

- Calcule v_1, v_2 et v_5 .
- Donne le sens de variation de (v_n) et sa limite en justifiant.
- À l'aide de la calculatrice, détermine le plus petit rang n tel que $v_n < 0,1$.

5 Vrai ou faux ? ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie (un contre-exemple suffit pour une affirmation fausse).

- a. Toute suite croissante est minorée.
- b. Toute suite majorée est décroissante.
- c. La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée.
- d. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

6 Encadrer une suite ★★★

Soit $u_n = 2n+1/n+1$ pour tout entier n .

- a. Montre que $u_n = 2 - 1/n+1$.
- b. En déduire que $1 \leq u_n < 2$ pour tout n .
- c. Montre que la suite est croissante.

7 Une première récurrence ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. Démonstre par récurrence que $u_n = 3n + 2$ pour tout entier n .

8 Somme des entiers impairs ★★★

Démonstre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

9 Divisibilité ★★★

Démonstre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $6^n - 1$ est un multiple de 5.

10 Une suite avec racine carrée ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

- a. Calcule u_1 et u_2 (valeurs approchées au millièmes).
- b. Démonstre par récurrence que $0 < u_n < 2$ pour tout n .
- c. Montre que $u_{n+1} - u_n = (2 - u_n)(1 + u_n) \div (\sqrt{u_n + 2} + u_n)$ et déduis le sens de variation.
- d. Que peut-on dire de la convergence de la suite ? Quelle est sa limite éventuelle ?

11 Majorée, croissante, convergente ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 2$.

- Calcule u_1, u_2, u_3, u_4 .
- Démontre par récurrence que $u_n \leq 5$ pour tout n .
- Montre que (u_n) est croissante.
- En déduire que (u_n) converge et détermine sa limite ℓ .
- Montre que (v_n) définie par $v_n = u_n - 5$ est géométrique, et exprime u_n en fonction de n .

12 Variation par le quotient ★★★

Soit $u_n = 3^n \div (n + 1)$ pour tout entier n .

- Calcule u_0, u_1, u_2, u_3 .
- Justifie que $u_n > 0$ pour tout n , puis calcule le quotient $u_{n+1} \div u_n$.
- Compare ce quotient à 1 et conclus. Que peut-on dire d'un minorant de la suite ?

13 Chercher un seuil ★★★

Un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux de 5 % par an. On note v_n le capital (en €) après n années.

- Justifie que (v_n) est géométrique et donne v_n en fonction de n .
- Écris en Python une fonction `annees()` qui renvoie le nombre d'années nécessaires pour dépasser 1 500 €.
- Quel nombre renvoie-t-elle ? Vérifie par le calcul de v_8 et v_9 .

14 Une inégalité par récurrence ★★★

Démontre que, pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

15 Deviner puis prouver ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \div (1 + u_n)$.

- Calcule u_1, u_2, u_3 et conjecture une expression de u_n .
- Démontre cette conjecture par récurrence.
- Étudie le sens de variation de (u_n) , puis sa limite.

16 Suite arithmético-géométrique ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

- Calcule u_1 et u_2 .
- Résous l'équation $\ell = 3\ell - 4$ et pose $w_n = u_n - \ell$. Montre que (w_n) est géométrique.
- Exprime w_n puis u_n en fonction de n . Vérifie avec u_2 .
- Étudie le sens de variation de (u_n) et sa limite.
- Détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$.

17 Un abonnement ★★★

Une chaîne de cuisine compte 1 200 abonnés au 1er janvier 2026. Chaque année, 15 % des abonnés se désinscrivent, puis 300 nouveaux abonnés arrivent. On note u_n le nombre d'abonnés au 1er janvier de l'année 2026 + n .

- Montre que $u_{n+1} = 0,85u_n + 300$ et calcule u_1 et u_2 .
- Montre que $v_n = u_n - 2\,000$ est géométrique, puis exprime u_n en fonction de n .
- Étudie le sens de variation de (u_n) . La suite est-elle majorée ? Interprète.
- Détermine à partir de quelle année le nombre d'abonnés dépasse 1 900.

18 Une suite qui se rapproche de 1 ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

- Calcule u_1 et u_2 . Vérifie que $u_{n+1} = 1 - (1 - u_n)^2$.
- Démontre par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout n .
- Montre que (u_n) est croissante.
- Conclus sur la convergence et détermine la limite ℓ (on admet que $\ell = \ell(2 - \ell)$).

19 Somme des carrés ★★★

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \mathbf{n(n+1)(2n+1)/6}$. Déduis-en la valeur de $1^2 + 2^2 + \dots + 20^2$.

20 Que fait ce programme ? ★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,5u_n + 1$, et le programme suivant :

```
def mystere(S):  
    u = 1  
    n = 0
```

```
while u < S:
    u = 1.5 * u + 1
    n = n + 1
return n
```

- Quelle valeur renvoie $\text{mystere}(20)$? Justifie avec un tableau des valeurs de u et n .
- Que représente le nombre renvoyé par $\text{mystere}(S)$?
- Montre que $u_n + 2$ est géométrique et en déduire u_n . Pourquoi le programme se termine-t-il quelle que soit la valeur de S ?
- Détermine par le calcul le plus petit n tel que $u_n \geq 100$.

21 Une suite qui tend vers $+\infty$ sans formule ★★★

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1 \div u_n$.

- Calcule u_1, u_2, u_3 .
- Démontre par récurrence que, pour tout n , $u_n > 0$.
- Démontre que (u_n) est strictement croissante.
- Démontre par récurrence que $u_n^2 \geq 2n + 1$ pour tout n .
- En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.