

Suites numériques

Cours de maths - 1ère

Une suite, c'est une liste de nombres rangés dans un ordre précis : le solde d'un compte à la fin de chaque mois, le nombre d'abonnés d'une chaîne chaque semaine, la hauteur d'un ballon à chaque rebond. En 1ère, tu apprends à **décrire** une suite (par une formule ou par une relation de proche en proche), à **étudier son sens de variation**, et à reconnaître deux familles très utiles : les suites **arithmétiques** (on ajoute toujours la même quantité) et les suites **géométriques** (on multiplie toujours par le même nombre). Elles modélisent la croissance **linéaire** et la croissance **exponentielle**, et tu apprendras à les programmer en Python.

1. Définir une suite

Suite numérique

Une **suite numérique** (u_n) associe à chaque entier naturel n (à partir d'un certain rang) un nombre réel noté u_n , appelé **terme de rang n** (ou d'indice n). Le premier terme est souvent u_0 , parfois u_1 .

Ne confonds pas les notations

(u_n) désigne la suite entière, u_n est un seul nombre. De même u_{n+1} est le terme *qui suit* u_n , alors que $u_n + 1$ est le nombre u_n augmenté de 1. Par exemple, si $u_4 = 10$, alors u_5 peut valoir n'importe quoi, mais $u_4 + 1$ vaut 11.

Il y a deux façons principales de définir une suite.

Mode explicite

La suite est définie **de façon explicite** quand on donne une formule qui calcule u_n directement à partir de n : $u_n = f(n)$.

Exemple : suite explicite

Soit $u_n = 3n^2 - 2n + 1$. Alors $u_0 = 1$, $u_1 = 3 - 2 + 1 = 2$, $u_2 = 12 - 4 + 1 = 9$, $u_3 = 27 - 6 + 1 = 22$. On peut même calculer $u_{10} = 300 - 20 + 1 = 281$ sans connaître u_9 .

Mode récurrent

La suite est définie **par récurrence** quand on donne son premier terme et une relation qui permet de passer d'un terme au suivant : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple : suite définie par récurrence

Soit $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 3$. On calcule de proche en proche : $v_1 = 2 \times 4 - 3 = 5$; $v_2 = 2 \times 5 - 3 = 7$; $v_3 = 2 \times 7 - 3 = 11$; $v_4 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

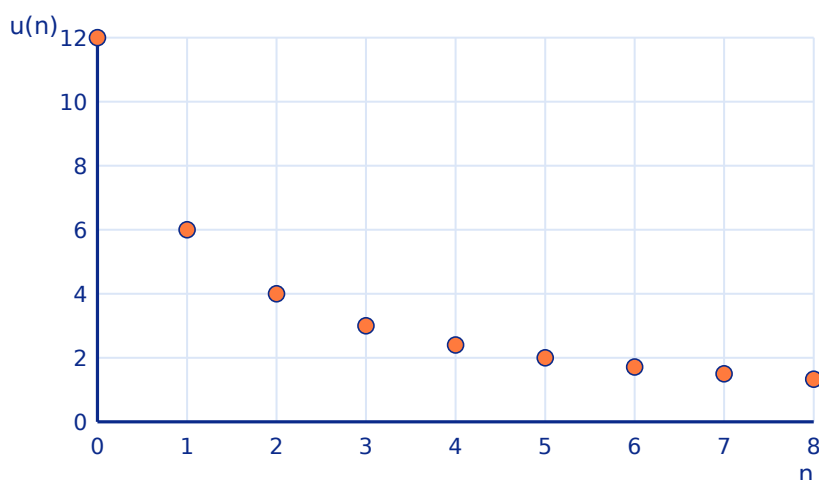
n	0	1	2	3	4
v_n	4	5	7	11	19

Explicite ou récurrent : lequel choisir ?

Une formule explicite donne n'importe quel terme en un seul calcul. Une relation de récurrence oblige à calculer tous les termes précédents, mais elle traduit naturellement une évolution « d'une période à la suivante ». Quand une suite n'est pas définie dès le rang 0, on le précise : $w_n = 1/n - 2$ n'existe que pour $n \geq 3$.

2. Représentation graphique

Pour représenter (u_n) , on place dans un repère les points de coordonnées $(n ; u_n)$. On obtient un **nuage de points isolés** : on ne les relie pas, car une suite n'est définie que pour les entiers. Voici les premiers termes de la suite définie par $u_n = 12/n + 1$.



Le nuage permet de « voir » le comportement de la suite : ici les points descendent, la suite semble décroissante. Mais attention : un graphique ne *prouve* rien, il suggère une conjecture qu'il faut ensuite démontrer par le calcul.

3. Sens de variation

Suite croissante, décroissante

Une suite (u_n) est :

- **croissante** si, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- **décroissante** si, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$;
- **constante** si, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.

On dit **strictement** croissante (ou décroissante) quand les inégalités sont strictes. Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.

Méthode 1 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

1. Exprime u_{n+1} en remplaçant n par $n + 1$ dans la formule (ou utilise la relation de récurrence).
2. Calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ et simplifie-la (développe, réduis, mets au même dénominateur).
3. Étudie son signe pour tout n : si elle est toujours positive, la suite est croissante ; toujours négative, décroissante.

Exemple : une suite qui n'est pas monotone

Soit $u_n = n^2 - 6n$. Alors $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 6(n + 1) = n^2 - 4n - 5$, donc $u_{n+1} - u_n = 2n - 5$. Cette différence est négative pour $n \leq 2$ et positive pour $n \geq 3$. La suite décroît jusqu'au rang 3 puis croît : elle n'est pas monotone. Les termes sont 0 ; -5 ; -8 ; -9 ; -8 ; -5 ; 0.

Exemple : suite définie par récurrence

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 2n^2 + 1$. Ici $u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 1 > 0$ pour tout n : la suite est strictement croissante ($u_0 = 3$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 16$).

Méthode 2 : comparer le quotient à 1 (termes strictement positifs)

Si tous les termes sont strictement positifs, alors $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Cette méthode est pratique quand la formule contient des puissances : pour $v_n = 6 \times 2^n$, on a $v_{n+1}/v_n = 2 > 1$, donc la suite est croissante.

Cas d'une suite explicite

Si $u_n = f(n)$ où f est croissante (respectivement décroissante) sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante).

La réciproque est fausse, et la récurrence est piégeuse

La suite $u_n = n^2 - 6n$ n'est pas monotone alors que $f(x) = x^2 - 6x$ est décroissante puis croissante : c'est cohérent. Mais pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, le sens de variation de f ne donne **pas** celui de la suite : avec $f(x) = -x$ (décroissante) et $u_0 = 1$, les termes valent $1 ; -1 ; 1 ; -1 ; \dots$ et la suite oscille.

4. Suites arithmétiques

Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r , appelé **raison**, tel que pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre**.

Exemple : un abonnement

Une salle d'escalade demande 30 € d'inscription puis 12 € par mois. Le coût total après n mois est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 30$ et de raison 12 : 30 ; 42 ; 54 ; 66 ; ...

Montrer qu'une suite est arithmétique

Calcule $u_{n+1} - u_n$ pour un n quelconque. Si le résultat ne dépend pas de n , c'est la raison. Pour $u_n = 4n - 7$: $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 7 - (4n - 7) = 4$. La suite est arithmétique de raison 4. Pour $u_n = n^2$, les différences valent 1, 3, 5, ... : elles changent, la suite n'est pas arithmétique.

Terme général

Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors pour tous entiers n et p :

$$u_n = u_0 + nr \text{ et plus généralement } u_n = u_p + (n - p)r.$$

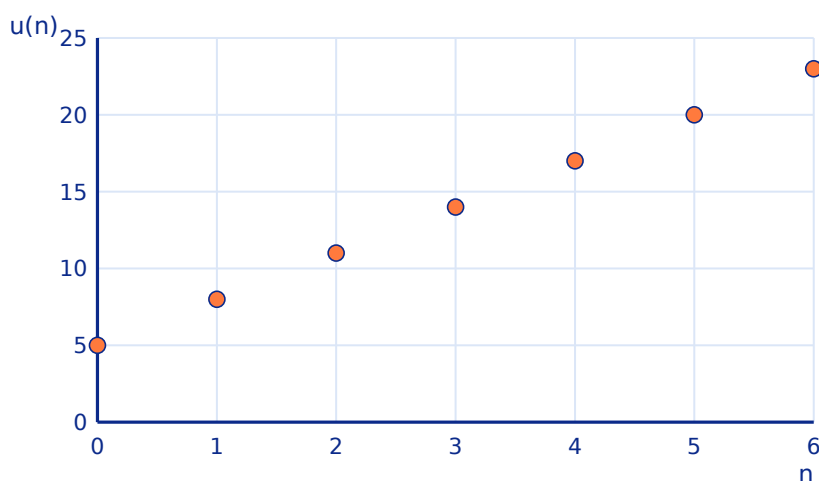
Démonstration. De $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$, ... on ajoute r exactement n fois pour aller du rang 0 au rang n , et $(n - p)$ fois pour aller du rang p au rang n .

Exemple : retrouver la suite avec deux termes

On sait que $u_4 = 17$ et $u_9 = 42$. Entre les rangs 4 et 9, on a ajouté 5 fois la raison : $42 = 17 + 5r$, donc $r = 5$. Alors $u_0 = 17 - 4 \times 5 = -3$ et $u_n = -3 + 5n$. Vérification : $u_9 = -3 + 45 = 42$.

Variation et représentation

Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$. Ses points $(n ; u_n)$ sont **alignés** sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$.



La figure montre la suite de premier terme 5 et de raison 3 : les points sont alignés et montent de 3 unités à chaque pas.

5. Somme de termes d'une suite arithmétique

Somme des premiers entiers

Pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \mathbf{n(n+1)/2}$.

Démonstration (l'idée du jeune Gauss). Notons $S = 1 + 2 + \dots + n$. Écrivons la somme à l'endroit puis à l'envers :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$$

En additionnant colonne par colonne, chaque colonne vaut $n + 1$ et il y a n colonnes : $2S = n(n + 1)$, d'où $S = \mathbf{n(n+1)/2}$.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut : **(nombre de termes) × premier terme + dernier terme/2**. En particulier $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

Méthode : calculer $3 + 7 + 11 + \dots + 99$

1. Reconnais une suite arithmétique de raison 4 : $u_k = 3 + 4k$.
2. Trouve le nombre de termes : $3 + 4k = 99$ donne $k = 24$, donc les rangs vont de 0 à 24 : **25 termes**.
3. Applique la formule : $25 \times \frac{3+99}{2} = 25 \times 51 = \mathbf{1275}$.

Compte bien les termes

Du rang p au rang n , il y a $n - p + 1$ termes, pas $n - p$. Du rang 5 au rang 12, il y a 8 termes.

6. Suites géométriques

Suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , appelé **raison**, tel que pour tout entier n : $u_{n+1} = q \times u_n$. On passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre**.

Exemple : une rumeur

Un message est envoyé à 3 personnes, puis chacune le renvoie à 2 autres, et ainsi de suite : le nombre de personnes touchées à chaque étape est 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ... suite géométrique de raison 2.

Terme général

Si (u_n) est géométrique de raison q , alors pour tous entiers n et p : $u_n = u_0 \times q^n$ et plus généralement $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

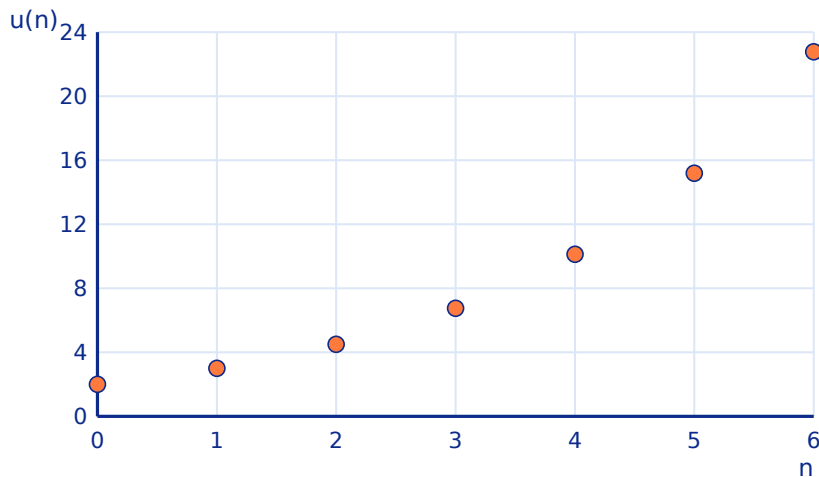
Variation d'une suite géométrique

Pour $u_n = u_0 \times q^n$, on a $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1)$. Pour $q > 0$:

	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$
--	---------	---------	-------------

	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$
$u_0 > 0$	croissante	constante	décroissante
$u_0 < 0$	décroissante	constante	croissante

Si $q < 0$, les termes changent de signe à chaque rang : la suite n'est ni croissante ni décroissante.



Ici $u_0 = 2$ et $q = 1,5$: les points s'écartent de plus en plus, c'est le visage d'une croissance qui s'accélère.

Somme de puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration. Notons $S = 1 + q + \dots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. En soustrayant, tous les termes intermédiaires s'annulent : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$, et on divise par $1 - q \neq 0$.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$: si la somme comporte N termes, elle vaut (premier terme) $\times \frac{1 - q^N}{1 - q}$.

Exemple : 5 + 15 + 45 + ... sur 6 termes

Premier terme 5, raison 3, $N = 6$ termes : $5 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 5 \times \frac{1 - 729}{-2} = 5 \times 364 = 1820$. Vérification : $5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1215 = 1820$.

7. Croissance linéaire et croissance exponentielle

Les deux familles de suites modélisent deux façons de grandir très différentes.

Deux modèles

- Une **croissance linéaire** : la quantité augmente d'une **valeur absolue constante** à chaque étape. C'est le modèle des suites arithmétiques (intérêts simples, forfait fixe par mois).
- Une **croissance exponentielle** : la quantité augmente d'un **pourcentage constant** à chaque étape. C'est le modèle des suites géométriques (intérêts composés, propagation, population).

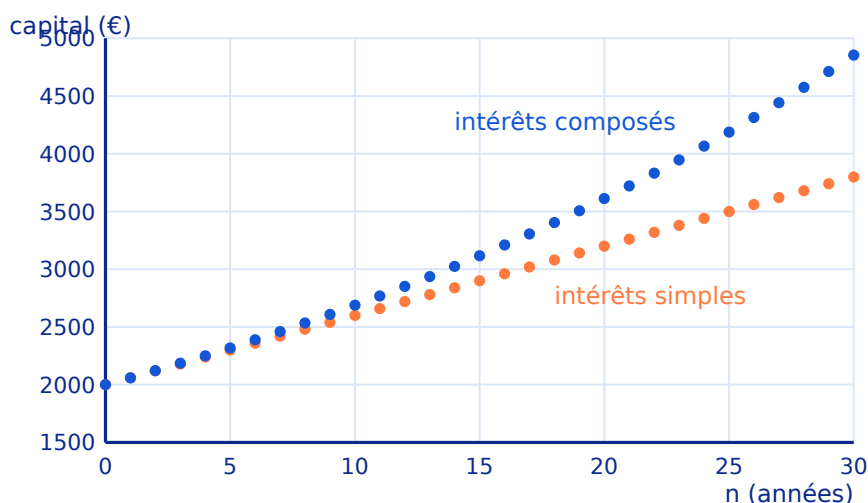
Lien avec les taux d'évolution

Une évolution de $t\%$ correspond à un coefficient multiplicateur $1 + \frac{t}{100}$. Une hausse de 3% se traduit par $\times 1,03$; une baisse de 8% par $\times 0,92$. Si la quantité évolue de $t\%$ à chaque étape, elle forme une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$.

Exemple : 2 000 € placés pendant 10 ans

À **intérêts simples** de 3% par an, on gagne chaque année 3% du capital de départ, soit 60 € : le capital vaut $2\,000 + 60n$ (arithmétique), donc $2\,600\text{ €}$ au bout de 10 ans.

À **intérêts composés** de 3% par an, on gagne chaque année 3% du capital *de l'année* : le capital vaut $2\,000 \times 1,03^n$ (géométrique), donc environ $2\,687,83\text{ €}$ au bout de 10 ans.



Au début les deux modèles se ressemblent, puis la croissance exponentielle prend le dessus et s'envole.

Temps de doublement

Avec $1,03^n \geq 2$, on trouve par essais successifs à la calculatrice $1,03^{23} \approx 1,974$ et $1,03^{24} \approx 2,033$: un capital placé à 3% composés double en 24 ans. Mathbot te dit : « Avec une croissance exponentielle, chaque période compte, alors commence tôt ! »

8. Algorithmes en Python

Un programme calcule un terme d'une suite récurrente avec une boucle **pour**, ou cherche le premier rang où une condition est vraie avec une boucle **tant que**.

Calculer un terme : boucle for

Pour la suite $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$, le programme ci-dessous renvoie u_n ; la boucle s'exécute n fois.

```
def terme(n):  
    u = 5  
    for k in range(n):  
        u = 2 * u - 3  
    return u
```

Ici `terme(3)` effectue 3 tours : u passe de 5 à 7, puis à 11, puis à 19. Le programme renvoie donc 19, c'est-à-dire u_3 .

Combien de tours de boucle ?

Après n tours de boucle, la variable u contient u_n . Avec `range(n)`, on fait exactement n tours : attention au décalage d'un rang.

Chercher un seuil : boucle while

On cherche le plus petit rang n tel que $2000 \times 1,03^n$ dépasse 3000.

```
def seuil():  
    u = 2000  
    n = 0  
    while u < 3000:  
        u = u * 1.03  
        n = n + 1  
    return n
```

La boucle continue tant que la condition $u < 3000$ est vraie ; elle s'arrête dès que $u \geq 3000$ et renvoie $n = 14$ (en effet $2000 \times 1,03^{13} \approx 2937$ et $2000 \times 1,03^{14} \approx 3025$).

Somme avec une boucle

Pour additionner les termes, on ajoute une variable S initialisée à 0 : à chaque tour, $S = S + u$. N'oublie pas de mettre à jour u *après* avoir ajouté, ou avant, mais de façon cohérente avec le rang de départ.

À retenir

- Une suite se définit de façon **explicite** ($u_n = f(n)$) ou **par récurrence** (u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$). Son nuage de points est formé de points isolés.
- Pour le sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$, ou comparaison de u_{n+1}/u_n à 1 quand les termes sont strictement positifs.
- Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_p + (n - p)r$; points alignés ; croissante si $r > 0$.
- Somme arithmétique : (nombre de termes) $\times$ **premier + dernier/2** ; $1 + 2 + \dots + n = \mathbf{n(n+1)/2}$.
- Géométrique : $u_{n+1} = q u_n$; $u_n = u_p q^{n-p}$; somme $1 + q + \dots + q^n = \mathbf{1-q^{n+1}/1-q}$ pour $q \neq 1$.
- Croissance linéaire = ajout constant (arithmétique) ; croissance exponentielle = pourcentage constant (géométrique, $q = 1 + \mathbf{t/100}$).
- En Python : **for** pour calculer un terme, **while** pour trouver un seuil.