

Bac de maths 2023 France J2

Sujet du bac de maths

Voici le **sujet 2 de spécialité mathématiques** du baccalauréat 2023, session de Métropole, Antilles-Guyane et Maroc du 21 mars 2023. Il s'ouvre sur un QCM de probabilités autour d'un jeu vidéo en ligne, puis étudie l'évolution d'une population d'insectes avec deux suites, dont une suite récurrente et une fonction seuil en Python. Il se poursuit avec une géométrie dans l'espace sur deux plans perpendiculaires, puis l'étude de la fonction $\ln(1 + e^{-x})$ et de sa convexité. **Cherche chaque exercice seul** avant de consulter le corrigé.

Dans cette page :

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Exercice 4

Baccalauréat · Spécialité mathématiques · Session 2023

Métropole, Antilles-Guyane, Maroc · 21 mars 2023 · Sujet 2

Épreuve d'enseignement de spécialité

Exercice 1 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débiter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.

Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les événements suivants :

- $\{A\}$: « Le joueur choisit le monde A » ;
- $\{B\}$: « Le joueur choisit le monde B » ;
- $\{G\}$: « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)$	b. $\left(\frac{3}{25}\right)$	c. $\left(\frac{7}{25}\right)$	d. $\left(\frac{24}{125}\right)$
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

2. La probabilité $\{P_B(G)\}$ de l'évènement $\{G\}$ sachant que $\{B\}$ est réalisé est égale à :

a. $\left(\frac{1}{5}\right)$	b. $\left(\frac{1}{3}\right)$	c. $\left(\frac{7}{15}\right)$	d. $\left(\frac{5}{12}\right)$
-------------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives. On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise. On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\left(\frac{12}{25}\right)$.

3. La probabilité, arrondie au millièm, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. 0,859	b. 0,671	c. 0,188	d. 0,187
----------	----------	----------	----------

4. On considère un entier naturel $\{n\}$ pour lequel la probabilité, arrondie au millièm, que le joueur gagne au plus $\{n\}$ parties est de 0,207. Alors :

a. $\{n = 2\}$	b. $\{n = 3\}$	c. $\{n = 4\}$	d. $\{n = 5\}$
----------------	----------------	----------------	----------------

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $\left(1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}\right)$	b. $\left(\left(\frac{13}{25}\right)^{10}\right)$	c. $\left(\left(\frac{12}{25}\right)^{10}\right)$	d. $\left(1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}\right)$
---	---	---	---

Exercice 2 5 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite $\left(\{u_n\}\right)$ où, pour tout entier naturel $\{n\}$, $\{u_n\}$ modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de $\{n\}$ mois.

On a donc $(u_0 = 0, 1)$.

1. Justifier que pour tout entier naturel (n) : $(u_n = 0, 1 \times 1, 6^n)$.
2. Déterminer la limite de la suite $(\left(u_n\right))$.
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel (n) à partir duquel $(u_n > 0, 4)$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite $(\left(v_n\right))$, définie par :

$$(v_0 = 0, 1) \text{ et, pour tout entier naturel } (n), (v_{n+1} = 1, 6v_n - 1, 6v_n^2),$$

où, pour tout entier naturel (n) , (v_n) est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de (n) mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction (f) définie sur l'intervalle $(\left[0, \frac{1}{2}\right])$ par $[f(x) = 1, 6x - 1, 6x^2.]$
 - a. Résoudre l'équation $(f(x) = x)$.
 - b. Montrer que la fonction (f) est croissante sur l'intervalle $(\left[0, \frac{1}{2}\right])$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel (n) , $(0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2})$.
b. Montrer que la suite $(\left(v_n\right))$ est convergente.

On note (ℓ) la valeur de sa limite. On admet que (ℓ) est solution de l'équation $(f(x) = x)$.

- c. Déterminer la valeur de (ℓ) .

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :  
    v=0.1  
    n=0
```

```

while v < a :
    v = 1.6 * v - 1.6 * v * v
    n = n + 1
return n

```

- Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
- Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé

$(\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right))$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $(2x + y - z + 2 = 0)$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1; 1; 2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la droite (Δ) est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1; 1; 1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (Δ) .

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite (Δ) est l'ensemble des points (M_t) de coordonnées $(0; -2 + t; t)$, où (t) désigne un nombre réel quelconque.

- Montrer que, pour tout réel (t) , $\mathrm{AM}_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
- En déduire que $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

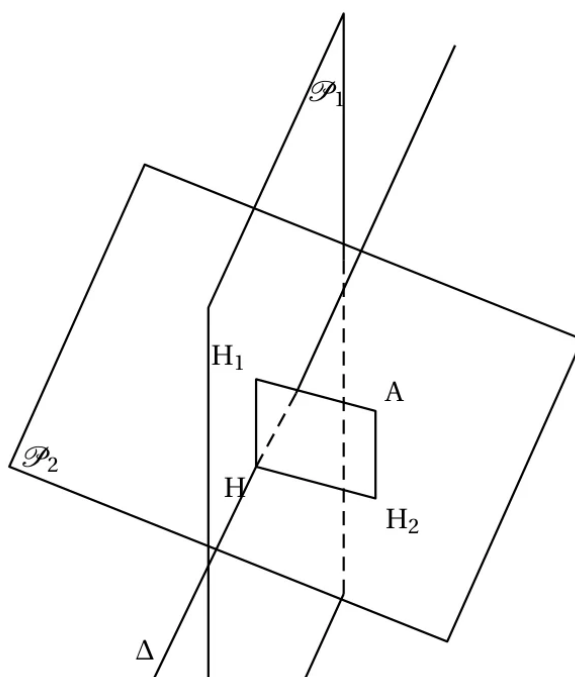
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées

$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0, 0, 2)$.

Sur le schéma ci-dessous, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1 , H_2 , H.



Montrer que $\mathrm{AH}_1\mathrm{H}_2\mathrm{H}$ est un rectangle.

Exercice 4 5 points

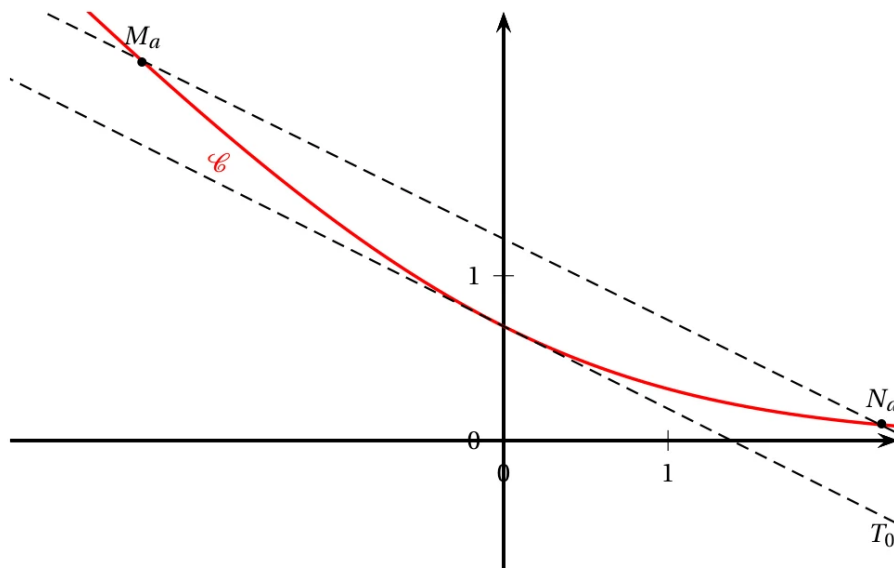
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de la fonction (f) en $(-\infty)$.
- b. Déterminer la limite de la fonction (f) en $(+\infty)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- c. On admet que la fonction (f) est dérivable sur $(\mathbb{R})$ et on note (f') sa fonction dérivée. Calculer $(f'(x))$ puis montrer que, pour tout nombre réel (x) , $(f'(x) = \frac{-1}{1 + \mathrm{e}^x})$.
- d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction (f) sur $(\mathbb{R})$.

2. On note (T_0) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.

- a. Déterminer une équation de la tangente (T_0) .
- b. Montrer que la fonction (f) est convexe sur $(\mathbb{R})$.
- c. En déduire que, pour tout nombre réel (x) , on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel (a) différent de 0, on note (M_a) et (N_a) les points de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives $(-a)$ et (a) .

On a donc : $(M_a \left(-a, f(-a) \right))$ et $(N_a \left(a, f(a) \right))$.

- a. Montrer que, pour tout nombre réel (x) , on a : $(f(x) - f(-x) = -x)$.
- b. En déduire que les droites (T_0) et $(\overline{M_a N_a})$ sont parallèles.