

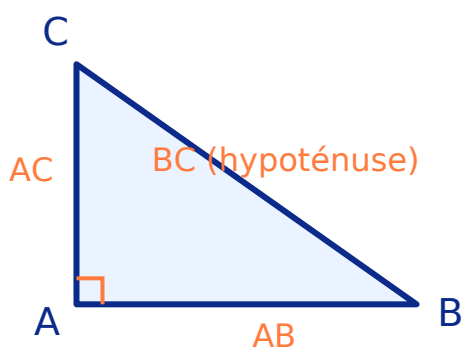
Théorème de Pythagore

Cours de maths - 4ème

Le théorème de Pythagore est l'un des plus célèbres des mathématiques : il relie les **trois côtés d'un triangle rectangle**. Pour bien l'utiliser, il faut d'abord maîtriser les **carrés** et les **racines carrées**. Dans ce chapitre, tu apprends à calculer une longueur manquante, puis à démontrer qu'un triangle est rectangle (ou qu'il ne l'est pas).

1. Rappels : triangle rectangle et carré

Vocabulaire du triangle rectangle Un triangle rectangle possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse** : c'est toujours le **plus long** côté. Les deux autres côtés sont les **côtés de l'angle droit**.



Le triangle ABC est rectangle en A : l'hypoténuse est [BC], face à l'angle droit.

Repérer l'hypoténuse Cherche le sommet de l'angle droit : l'hypoténuse est le côté qui ne touche pas ce sommet. Si le triangle EFG est rectangle en F, l'hypoténuse est [EG].

Carré d'un nombre Le carré d'un nombre a est le nombre $a \times a$; on le note a^2 . C'est l'aire d'un carré de côté a . Par exemple $5^2 = 5 \times 5 = 25$ et $0,3^2 = 0,3 \times 0,3 = 0,09$.

2. Carrés parfaits

Carré parfait Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier. Voici les premiers :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

À connaître par cœur Apprends au moins les carrés de 1 à 15 : tu les retrouveras sans cesse dans les calculs avec Pythagore (surtout 9, 16, 25, 36, 64, 100, 144 et 169).

Piège classique a^2 ne veut pas dire $a \times 2$! Par exemple $6^2 = 36$ et non 12.

3. Racine carrée d'un nombre positif

Racine carrée La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre **positif** dont le carré est a . On la note $\sqrt{a}$. Elle représente la mesure du côté d'un carré d'aire a .

Exemples $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$ · $\sqrt{0,25} = 0,5$ car $0,5^2 = 0,25$ · $\sqrt{0} = 0$ · $\sqrt{1} = 1$.

Propriétés (pour a positif) $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$. Un carré n'est jamais négatif, donc on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

Exemple $(\sqrt{11})^2 = 11$; $\sqrt{9^2} = 9$; $\sqrt{(0,3^2)} = 0,3$.

Quand a n'est pas un carré parfait, $\sqrt{a}$ n'est pas un nombre entier. Sa valeur est alors une **valeur approchée** que l'on obtient avec la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice. Par exemple, la calculatrice affiche pour $\sqrt{2}$ environ 1,414213562... et les chiffres continuent sans jamais se répéter régulièrement : on ne peut pas l'écrire exactement avec un nombre fini de décimales.

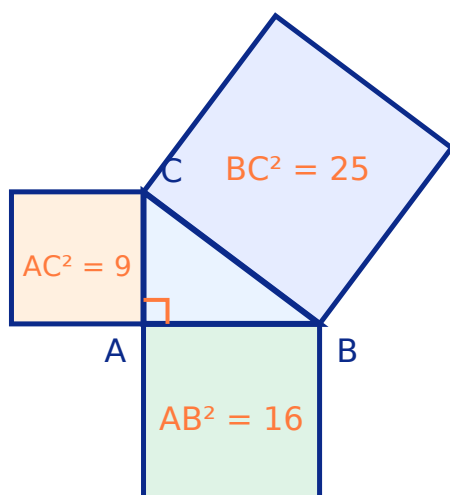
Encadrer une racine carrée On cherche les deux carrés parfaits consécutifs qui entourent le nombre. Pour $\sqrt{50}$: $49 < 50 < 64$, donc $7 < \sqrt{50} < 8$. Avec la calculatrice, $\sqrt{50} \approx 7,07$ (arrondi au centième).

Attention $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, mais $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$. La racine carrée d'une somme n'est **pas** la somme des racines carrées.

Mathbot « Ma calculatrice me donne $\sqrt{2} \approx 1,4142$. Si je la mets au carré, je trouve 1,99996..., très proche de 2 mais pas exactement 2. C'est normal : mon résultat n'est qu'une valeur approchée ! »

4. Le théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore Si un triangle est **rectangle**, alors le carré de la longueur de l'**hypoténuse** est égal à la **somme des carrés** des longueurs des deux autres côtés. Si ABC est rectangle en A, alors **$BC^2 = AB^2 + AC^2$** .



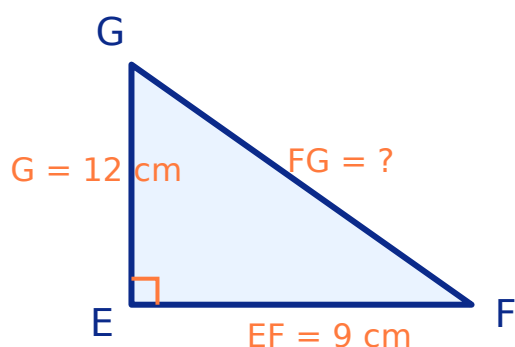
Sur le triangle de côtés 3, 4 et 5, l'aire du carré de l'hypoténuse (25) est la somme des aires des deux autres carrés : $9 + 16 = 25$.

Vérifier sur un exemple Dans un triangle rectangle de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ et $10^2 = 100$. L'égalité est vraie.

Trois erreurs à éviter 1) Le théorème ne s'applique que dans un triangle **rectangle**. 2) Le carré le plus grand est celui de l'hypoténuse, il est seul d'un côté de l'égalité. 3) Il ne faut pas additionner les longueurs ($6 + 8 \neq 10$) : on additionne les **carrés**.

5. Calculer la longueur de l'hypoténuse

Méthode 1) Faire (ou lire) la figure et repérer l'angle droit. 2) Écrire : « Le triangle ... est rectangle en ..., donc d'après le théorème de Pythagore : $\dots^2 = \dots^2 + \dots^2$. » 3) Remplacer par les valeurs et calculer le carré de l'hypoténuse. 4) Prendre la racine carrée. 5) Conclure avec l'unité.



Exemple résolu EFG est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore : $FG^2 = EF^2 + EG^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Donc $FG = \sqrt{225} = \mathbf{15 \text{ cm}}$.

Quand le résultat n'est pas entier Dans un triangle MNP rectangle en M avec $MN = 3$ cm et $MP = 5$ cm : $NP^2 = 9 + 25 = 34$, donc $NP = \sqrt{34} \approx \mathbf{5,83}$ cm (arrondi au centième).

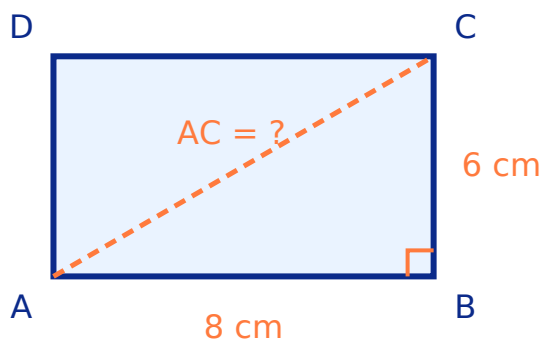
6. Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Méthode On écrit la même égalité, mais on isole le carré inconnu : si BC est l'hypoténuse et AB un côté connu, alors $AC^2 = BC^2 - AB^2$. On retranche toujours le plus petit carré au plus grand.

Exemple résolu Le triangle RST est rectangle en S, avec $RT = 17$ cm et $RS = 8$ cm. D'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2$, donc $ST^2 = RT^2 - RS^2 = 289 - 64 = 225$, d'où $ST = \sqrt{225} = \mathbf{15}$ cm.

Contrôle de bon sens L'hypoténuse est le plus long côté. Si tu trouves un côté de l'angle droit plus grand que l'hypoténuse, tu as additionné au lieu de soustraire.

Le théorème permet aussi de calculer des longueurs dans des figures courantes : la **diagonale d'un rectangle**, la **diagonale d'un carré**, la **hauteur d'un triangle isocèle**... à condition de repérer un triangle rectangle.



Diagonale d'un rectangle ABCD est un rectangle de longueur 8 cm et de largeur 6 cm. Le triangle ABC est rectangle en B, donc $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100$ et $AC = \mathbf{10}$ cm.

7. La réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque Si, dans un triangle, le carré de la longueur du **plus grand côté** est égal à la **somme des carrés** des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est **rectangle** et son hypoténuse est le plus grand côté.

Démontrer qu'un triangle est rectangle 1) Identifier le plus grand côté. 2) Calculer séparément son carré, puis la somme des carrés des deux autres côtés. 3) Comparer. Si

Fiche en ligne : maths-facile.eu/theoreme-de-pythagore-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

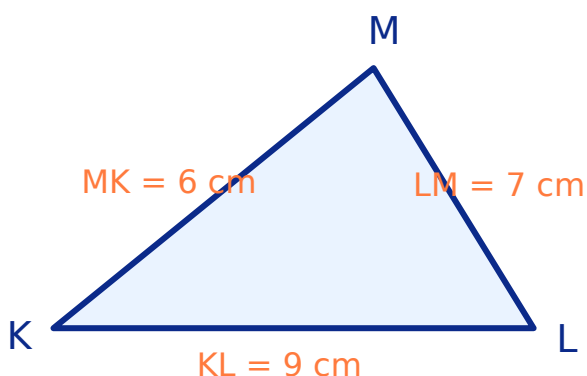
les deux résultats sont égaux, conclure : « D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ... est rectangle en ... » (le sommet de l'angle droit est celui qui est opposé au plus grand côté).

Exemple résolu Un triangle a pour côtés 7,5 cm ; 4,5 cm et 6 cm. Le plus grand côté mesure 7,5 cm. $7,5^2 = 56,25$ et $4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$. Les deux résultats sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est **rectangle** ; son angle droit est opposé au côté de 7,5 cm.

Ne jamais écrire $BC^2 = AB^2 + AC^2$ avant de savoir ! Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on ne peut pas partir de l'égalité de Pythagore : c'est justement ce qu'on veut prouver. On calcule les deux côtés de l'égalité **séparément**, puis on compare.

8. Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle

Contraposée du théorème de Pythagore Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté n'est **pas égal** à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle **n'est pas rectangle**.



Exemple résolu Le triangle KLM a pour côtés $KL = 9$ cm, $LM = 7$ cm et $MK = 6$ cm. Le plus grand côté est $[KL]$: $KL^2 = 81$. $LM^2 + MK^2 = 49 + 36 = 85$. Comme $81 \neq 85$, le triangle KLM **n'est pas rectangle** (d'après la contraposée du théorème de Pythagore).

Que dire de la somme ? Ici $85 > 81$: le triangle est « plus pointu » qu'un triangle rectangle. Mais au collège, on conclut simplement qu'il n'est pas rectangle.

9. Rédiger et résoudre des problèmes

Quel théorème choisir ?

- Le triangle est rectangle et il manque une longueur : **théorème de Pythagore**.
- On connaît les trois longueurs et on se demande si l'angle est droit : **réciproque**

(ou sa contraposée).

Dans un problème concret (échelle contre un mur, câble d'un mât, chemin en diagonale), on commence par dessiner un schéma, on repère le triangle rectangle, puis on applique la méthode et on termine par une phrase réponse avec l'unité.

Exemple Une échelle de 4 m est posée contre un mur vertical, son pied à 1,6 m du mur. Le triangle formé par le mur, le sol et l'échelle est rectangle ; l'échelle est son hypoténuse. $h^2 = 4^2 - 1,6^2 = 16 - 2,56 = 13,44$ donc $h = \sqrt{13,44} \approx 3,67$. **L'échelle atteint environ 3,67 m de hauteur.**

À retenir

- Le carré de a est $a^2 = a \times a$; la racine carrée $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a ; $(\sqrt{a})^2 = a$.
- Connais les carrés parfaits de 1 à 15 et encadre une racine carrée entre deux entiers.
- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit ; c'est le plus long côté.
- Théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Hypoténuse : on additionne les carrés. Côté de l'angle droit : on soustrait au carré de l'hypoténuse. Puis on prend la racine carrée.
- Réciproque : si le carré du plus grand côté égale la somme des carrés des deux autres, le triangle est rectangle. Sinon, il ne l'est pas.
- On rédige toujours : triangle rectangle en..., donc d'après le théorème de Pythagore..., calcul, conclusion avec l'unité.