

Théorème de Thalès

Corrigé des exercices - 3ème

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Reconnaître la configuration ★★★

- a. H est sur [EF] et I est sur [EG] : ce sont des **triangles emboîtés** (le petit triangle EHI est rangé dans le grand EFG).
- b. Le sommet commun est le point **E**.
- c. Les droites (FH) et (GI) sont sécantes en E et (HI) // (FG). D'après le théorème de Thalès : **$\frac{EH}{EF} = \frac{EI}{EG} = \frac{HI}{FG}$** .

2 Papillon : écrire les rapports ★★★

- a. O est entre A et D, et entre B et E : c'est une configuration en **papillon**.
- b. Les triangles OAB et ODE.
- c. Les droites (AD) et (BE) sont sécantes en O et (AB) // (DE). D'après le théorème de Thalès : **$\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB}$** .

3 Un premier calcul de longueurs ★★★

- a. $AB = AM + MB = 2 + 3 = \mathbf{5 \text{ cm}}$.
- b. M est sur (AB), N est sur (AC) et (MN) // (BC). D'après le théorème de Thalès : **$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$** , soit **$\frac{2}{5} = \frac{3}{AC} = \frac{MN}{8}$** .

 $AC = 3 \times 5 \div 2 = 15 \div 2 = \mathbf{7,5 \text{ cm}}$.
- c. $MN = 8 \times 2 \div 5 = 16 \div 5 = \mathbf{3,2 \text{ cm}}$.

4 Papillon : un calcul direct ★★★

- (AD) et (BE) sont sécantes en O et (AB) // (DE). D'après le théorème de Thalès : **$\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB}$** , soit **$\frac{9}{6} = \frac{OE}{4} = \frac{DE}{5}$** .

Le rapport **9/6** vaut 1,5. Donc $OE = 4 \times 1,5 = \mathbf{6\text{ cm}}$ et $DE = 5 \times 1,5 = \mathbf{7,5\text{ cm}}$.

5 Vrai ou faux ? ★★★

a. Vrai. C'est directement le théorème de Thalès.

b. Faux. Le côté [MN] correspond à [BC], pas à [AC] : la bonne égalité est **$AM/AB = MN/BC$** .

c. Vrai. C'est la réciproque du théorème de Thalès (M et N sont sur les côtés [AB] et [AC], donc les points sont alignés dans le même ordre).

d. Faux. Si elles étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait l'égalité des deux rapports. Ils sont différents : les droites ne sont pas parallèles.

6 Agrandir un rectangle ★★★

a. Largeur : $4 \times 2,5 = \mathbf{10\text{ cm}}$. Longueur : $6 \times 2,5 = \mathbf{15\text{ cm}}$.

b. Périmètre : $2 \times (10 + 15) = \mathbf{50\text{ cm}}$ (l'ancien valait $2 \times (4 + 6) = 20\text{ cm}$). Aire : $10 \times 15 = \mathbf{150\text{ cm}^2}$ (l'ancienne valait $4 \times 6 = 24\text{ cm}^2$).

c. $150 \div 24 = 6,25 = 2,5^2$. L'aire est multipliée par $k^2 = \mathbf{6,25}$.

7 Réduire une figure ★★★

a. $k = 6 \div 9 = \mathbf{2/3}$. C'est bien une réduction puisque k est inférieur à 1.

b. $12 \times \mathbf{2/3} = 8\text{ cm}$ et $15 \times \mathbf{2/3} = 10\text{ cm}$. Le triangle réduit a pour côtés **6 cm, 8 cm et 10 cm**.

8 Retrouver AM et AN ★★★

M est sur (AB), N est sur (AC) et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès : **$AM/12 = AN/10 = 9/15$** .

$9/15 = 0,6$. Donc $AM = 12 \times 0,6 = \mathbf{7,2\text{ cm}}$ et $AN = 10 \times 0,6 = \mathbf{6\text{ cm}}$.

Comme M est sur [AB] : $MB = AB - AM = 12 - 7,2 = \mathbf{4,8\text{ cm}}$. Comme N est sur [AC] : $NC = 10 - 6 = \mathbf{4\text{ cm}}$.

9 Papillon avec des décimaux ★★★

a. (BD) et (CE) sont sécantes en A et (BC) // (DE). D'après le théorème de Thalès : $\mathbf{AD/AB = AE/AC = DE/BC}$, soit $\mathbf{5,4/3,6 = AE/4,2 = DE/2,8}$.

$\mathbf{5,4/3,6 = 1,5}$. Donc $\mathbf{AE = 4,2 \times 1,5 = 6,3 \text{ cm}}$ et $\mathbf{DE = 2,8 \times 1,5 = 4,2 \text{ cm}}$.

b. A est entre C et E (configuration en papillon) : $\mathbf{CE = CA + AE = 4,2 + 6,3 = 10,5 \text{ cm}}$.

10 Parallèles ou pas ? ★★★

a. Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. $\mathbf{AM/AB = 3,6/9 = 0,4}$ et $\mathbf{AN/AC = 4/10 = 0,4}$. Les rapports sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Thalès, **(MN) // (BC)**.

b. $\mathbf{AM/AB = 3/8 = 0,375}$ et $\mathbf{AN/AC = 4/12 = 1/3 \approx 0,333}$. On vérifie avec les produits en croix : $3 \times 12 = 36$ et $8 \times 4 = 32$, différents. Les rapports ne sont pas égaux : si (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait l'égalité. Donc **(MN) et (BC) ne sont pas parallèles**.

11 Un triangle et une parallèle ★★★

a. $\mathbf{AB = AE + EB = 4 + 2 = 6 \text{ cm}}$ et $\mathbf{AC = AF + FC = 5 + 2,5 = 7,5 \text{ cm}}$.

b. Points alignés dans le même ordre. $\mathbf{AE/AB = 4/6 = 2/3}$ et $\mathbf{AF/AC = 5/7,5 = 2/3}$ (car $5 \times 3 = 15$ et $7,5 \times 2 = 15$). Les rapports sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Thalès, **(EF) // (BC)**.

c. Alors $\mathbf{AC = 5 + 3 = 8 \text{ cm}}$ et $\mathbf{AF/AC = 5/8 = 0,625}$, différent de $\mathbf{2/3 \approx 0,667}$ (produits en croix : $4 \times 8 = 32$ et $6 \times 5 = 30$). Les droites ne seraient **pas** parallèles.

12 Réciproque en papillon ★★★

a. Les points D, O, G et E, O, H sont alignés dans le même ordre (O est entre les deux dans chaque cas). $\mathbf{OG/OD = 6/4 = 1,5}$ et $\mathbf{OH/OE = 7,5/5 = 1,5}$. Les rapports sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Thalès, **(DE) // (GH)**.

b. $\mathbf{OH/OE = 8/5 = 1,6}$, alors que $\mathbf{OG/OD = 1,5}$. Les rapports sont différents : **(DE) et (GH) ne sont pas parallèles**.

13 L'ombre d'un arbre ★★★

Les rayons du soleil sont parallèles, et le bâton comme l'arbre sont verticaux (perpendiculaires au sol). En faisant glisser le petit triangle le long du sol jusqu'à faire coïncider les bouts des ombres, on obtient deux triangles emboîtés avec deux côtés

parallèles (les verticales) : on peut utiliser le théorème de Thalès.

$$\mathbf{PB/RT = PQ/RS}, \text{ soit } \mathbf{1,5/RT = 2/9}.$$

$$\mathbf{RT = 1,5 \times 9 \div 2 = 13,5 \div 2 = 6,75. L'arbre mesure 6,75 m de haut.}$$

14 La largeur de l'étang ★★★

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O, avec O entre A et C et entre B et D, et (CD) // (AB). D'après le théorème de Thalès :

$$\mathbf{OC/OA = CD/AB}, \text{ soit } \mathbf{10/40 = 9,5/AB}.$$

$$\mathbf{AB = 9,5 \times 40 \div 10 = 380 \div 10 = 38 \text{ m.}} \text{ La largeur de l'étang est de 38 m.}$$

15 Agrandir une photo ★★★

a. $k = 30 \div 12 = \mathbf{2,5}.$

b. $18 \times 2,5 = \mathbf{45 \text{ cm.}}$

c. Aire : $30 \times 45 = \mathbf{1\,350 \text{ cm}^2}.$ L'aire de départ vaut $12 \times 18 = 216 \text{ cm}^2$ et $216 \times 2,5^2 = 216 \times 6,25 = 1\,350.$ L'aire est multipliée par $k^2 = \mathbf{6,25}.$

16 Une maquette ★★★

a. $48 \text{ m} = 4\,800 \text{ cm.}$ $k = 24 \div 4\,800 = \mathbf{1/200}.$ La maquette est à l'échelle 1/200.

b. $30 \text{ m} = 3\,000 \text{ cm}$ et $3\,000 \div 200 = \mathbf{15 \text{ cm.}}$

c. Les aires sont multipliées par $k^2 = \mathbf{1/40\,000}.$ $600 \text{ m}^2 = 6\,000\,000 \text{ cm}^2$ et $6\,000\,000 \div 40\,000 = \mathbf{150 \text{ cm}^2}.$

17 Une équation avec Thalès ★★★

a. D'après le théorème de Thalès : $\mathbf{AM/AB = AN/AC},$ soit $\mathbf{x/10 = x+1/15}.$

b. Produit en croix : $15x = 10 \times (x + 1),$ soit $15x = 10x + 10.$ On soustrait $10x$: $5x = 10,$ donc $x = 2.$

c. $\mathbf{AM = 2 \text{ cm}}$ et $\mathbf{AN = 2 + 1 = 3 \text{ cm.}}$ Vérification : $\mathbf{2/10 = 0,2}$ et $\mathbf{3/15 = 0,2}.$

18 Les diagonales d'un trapèze ★★★

a. O est entre A et C et entre B et D (les diagonales d'un trapèze se coupent à l'intérieur). Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O et (AB) // (CD) : c'est un papillon. D'après le théorème de Thalès : **$OA/OC = OB/OD = AB/CD$** .

b. **$AB/CD = 6/9 = 2/3$** . Donc $OA = 2/3 \times OC$, soit $OA : OC = 2 : 3$. Comme $OA + OC = AC = 15$ cm, on partage 15 en 5 parts : une part vaut 3 cm. Ainsi **$OA = 2 \times 3 = 6$ cm** et **$OC = 3 \times 3 = 9$ cm**. Vérification : **$6/9 = 2/3$** .

c. **$OB/OD = 2/3$** , soit **$4/OD = 2/3$** . $OD = 4 \times 3 \div 2 = 6$ cm. Puis $BD = OB + OD = 4 + 6 = 10$ cm.

19 Réciproque puis Pythagore ★★★

a. M est sur [AB] et N est sur [AC] : les points sont alignés dans le même ordre. **$AM/AB = 3/9 = 1/3$** et **$AN/AC = 4/12 = 1/3$** . Les rapports sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Thalès, **(MN) // (BC)**.

b. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$. Donc $BC = \sqrt{225} = 15$ cm.

c. Avec Thalès (maintenant que (MN) // (BC)) : **$MN/BC = AM/AB = 1/3$** , donc $MN = 15 \div 3 = 5$ cm.

Avec Pythagore dans AMN rectangle en A : $MN^2 = AM^2 + AN^2 = 9 + 16 = 25$, donc $MN = \sqrt{25} = 5$ cm. Les deux méthodes donnent le même résultat.

20 Un parallélogramme caché ★★★

a. D est sur [AB], E est sur [AC], (DE) // (BC). D'après le théorème de Thalès : **$AD/AB = DE/BC$** , soit **$4/10 = DE/15$** . $DE = 15 \times 4 \div 10 = 6$ cm.

b. $BD = AB - AD = 10 - 4 = 6$ cm. Dans le triangle ABC, F est sur [BC], D est sur [BA] et (DF) // (AC). D'après le théorème de Thalès : **$BD/BA = BF/BC$** , soit **$6/10 = BF/15$** . $BF = 15 \times 6 \div 10 = 9$ cm. Puis $FC = BC - BF = 15 - 9 = 6$ cm.

c. Les côtés (DE) et (FC) sont parallèles (car (BC) contient F et C), et (DF) et (EC) sont parallèles (car E est sur (AC)). Le quadrilatère DECF a ses côtés opposés parallèles : c'est un **parallélogramme**. On retrouve $DE = FC = 6$ cm, ce qui confirme le résultat.

21 Mesurer un arbre avec un bâton ★★★

Hauteur de B au-dessus des yeux : $HB = 2,5 - 1,6 = 0,9$ m. Les points O, H, K sont

alignés, ainsi que O, B, T. Le bâton et l'arbre sont verticaux, donc $(HB) \parallel (KT)$. D'après le théorème de Thalès (triangles emboîtés OHB et OKT) : $\mathbf{OH/OK = HB/KT}$, soit $\mathbf{3/15 = 0,9/KT}$.

$KT = 0,9 \times 15 \div 3 = 4,5$ m. La hauteur de l'arbre est $KT + 1,6 = 4,5 + 1,6 = \mathbf{6,1}$ m.

22 Une pyramide coupée ★★★

a. La hauteur passe de 12 cm à 6 cm : $k = 6 \div 12 = \mathbf{1/2}$.

b. Le côté de la section vaut $6 \times \mathbf{1/2} = 3$ cm, donc son aire est $3 \times 3 = \mathbf{9\text{ cm}^2}$ (on retrouve $36 \times k^2 = 36 \times \mathbf{1/4} = 9$).

c. Grande pyramide : $\mathbf{1/3} \times 36 \times 12 = \mathbf{144\text{ cm}^3}$. Petite pyramide : $\mathbf{1/3} \times 9 \times 6 = \mathbf{18\text{ cm}^3}$. On vérifie : $144 \times k^3 = 144 \times \mathbf{1/8} = 18$.

d. Le tronc a pour volume $144 - 18 = \mathbf{126\text{ cm}^3}$.

23 L'erreur de Léo ★★★

a. On compare $\mathbf{AM/AB = 4,2/7}$ et $\mathbf{AN/AC = 5,3/9}$. Produits en croix : $4,2 \times 9 = 37,8$ et $7 \times 5,3 = 37,1$. Les deux produits sont différents.

b. Les points sont alignés dans le même ordre, mais $\mathbf{AM/AB = 0,6}$ alors que $\mathbf{AN/AC = 5,3/9 \approx 0,589}$. Si (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait l'égalité des rapports. Elle n'a pas lieu : **Léo a tort, les droites ne sont pas parallèles**. « Presque égaux » ne suffit pas en géométrie : il faut une égalité exacte.

c. Il faudrait $\mathbf{AN/9 = 0,6}$, soit $AN = 9 \times 0,6 = \mathbf{5,4\text{ cm}}$.