

Théorème de Thalès

Cours de maths - 3ème

Dans ce chapitre, tu découvres l'un des théorèmes les plus célèbres de la géométrie : le **théorème de Thalès**. Il relie des droites parallèles et des longueurs proportionnelles. Tu apprends à l'utiliser pour **calculer une longueur**, puis à utiliser sa **réci-proque** pour prouver que deux droites sont parallèles (ou qu'elles ne le sont pas). Tu verras aussi les **agrandissements et réductions** et des problèmes concrets comme mesurer la hauteur d'un arbre grâce à son ombre.

1. Avant de commencer : trois rappels

Droites parallèles Deux droites sont **parallèles** si elles ne se coupent jamais. On écrit $(d_1) \parallel (d_2)$. Pour des segments, on dit que $(MN) \parallel (BC)$ quand les droites qui les portent sont parallèles. Sur un dessin, on le code souvent par de petites flèches identiques.

Tableau de proportionnalité Deux suites de nombres sont proportionnelles quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Exemple : 2 kg de pommes coûtent 5 €, donc 6 kg coûtent 15 € (on multiplie par 3). Les rapports **5/2** et **15/6** sont égaux : ils valent tous les deux 2,5.

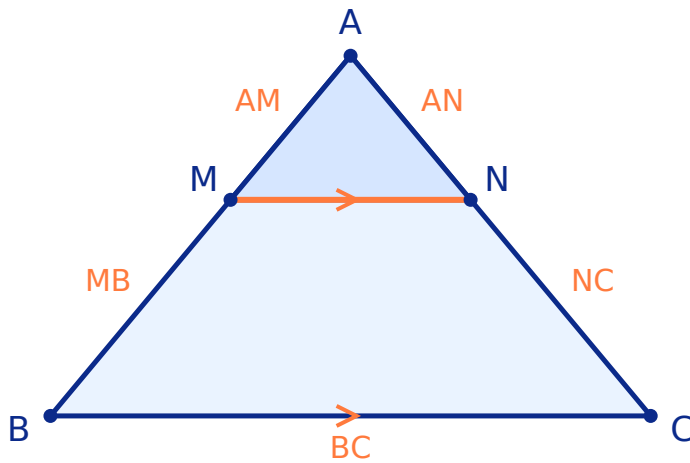
Produit en croix (rappel) Si $a/b = c/d$ (avec b et d non nuls), alors $a \times d = b \times c$. On s'en sert pour trouver un nombre manquant : si **3/x = 12/20**, alors $x = 3 \times 20 \div 12 = 5$.

Le théorème de Thalès est en réalité une histoire de proportionnalité entre les côtés de deux triangles. Garde bien ce lien en tête.

2. Deux configurations à reconnaître

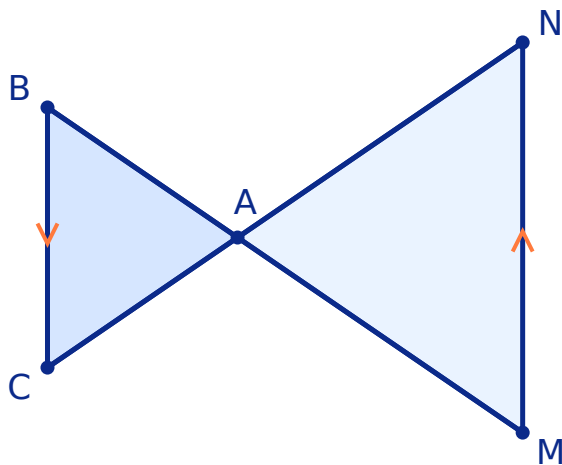
Le théorème de Thalès s'applique toujours dans une même situation de départ : **deux droites sécantes** en un point A, coupées par **deux droites parallèles**. On obtient alors deux triangles, ABC et AMN, qui ont le sommet A en commun. Il existe deux façons de les placer.

Triangles emboîtés Les points M et N sont sur les **côtés** [AB] et [AC] du grand triangle ABC. Le petit triangle AMN est « rangé » dans le grand : on voit une sorte de « tente dans la tente ».



Triangles emboîtés : M est sur [AB], N est sur [AC] et (MN) est parallèle à (BC).

Configuration en papillon Les points M et N sont de l'**autre côté** du sommet A : A se trouve **entre** B et M, et **entre** C et N. Les deux triangles ABC et AMN se touchent en un seul point, comme les deux ailes d'un papillon (ou un nœud papillon).



Papillon : (BM) et (CN) se coupent en A, et (BC) est parallèle à (MN).

Comment bien repérer la configuration ? 1) Cherche le point commun aux deux triangles (ici A). 2) Repère les deux droites sécantes qui passent par lui. 3) Repère les deux droites parallèles. Dans les deux cas, **les sommets de même nom se correspondent** : B avec M, C avec N, et A avec lui-même.

3. Le théorème de Thalès

Théorème de Thalès Soit A un point, et deux droites (BM) et (CN) sécantes en A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles :

$$\mathbf{AM/AB = AN/AC = MN/BC.}$$

Ce théorème vaut pour les triangles emboîtés comme pour le papillon. Dans les deux cas, on peut ranger les longueurs dans un tableau de proportionnalité, avec le petit triangle sur une ligne et le grand triangle sur l'autre :

Triangle AMN	AM	AN	MN
Triangle ABC	AB	AC	BC

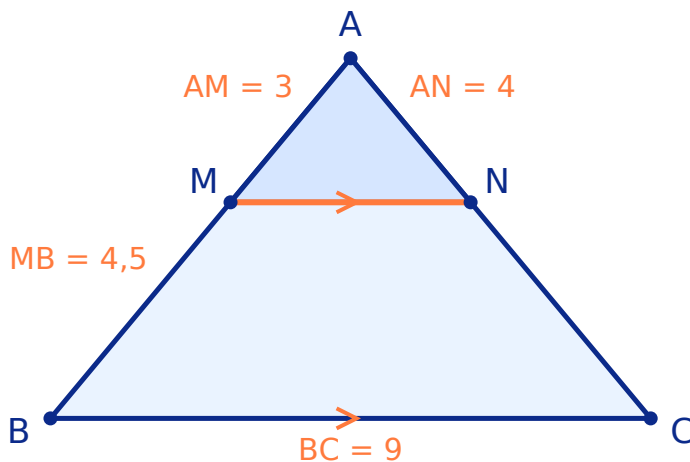
Chaque colonne contient deux côtés qui se « répondent » : un côté de AMN au-dessus, le côté correspondant de ABC en dessous.

Les pièges classiques 1. Il faut toujours que les deux droites soient **parallèles** : sans parallèles, le théorème ne s'applique pas, même si le dessin « a l'air » correct. **2.** Chaque fraction doit avoir **un côté du petit triangle en haut et le côté correspondant du grand triangle en bas** (ou l'inverse partout, mais jamais un mélange). **3.** Les trois côtés d'une même fraction partent du même sommet ou sont parallèles : AM/AB est correct, AM/MB est faux (MB n'est pas un côté du grand triangle).

4. Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

Méthode en quatre étapes 1) **Repère** les deux droites sécantes et les deux droites parallèles. 2) **Écris** les égalités de rapports du théorème. 3) **Remplace** par les valeurs connues dans les deux rapports qui t'intéressent. 4) **Calcule** la longueur manquante avec un produit en croix, puis écris une phrase réponse avec l'unité.

Exemple 1 : triangles emboîtés Sur la figure, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On a AM = 3 cm, MB = 4,5 cm, AN = 4 cm et BC = 9 cm. Calculons AC et MN.



Rédaction. M est sur la droite (AB), N est sur la droite (AC) et (MN) // (BC). D'après le théorème de Thalès :

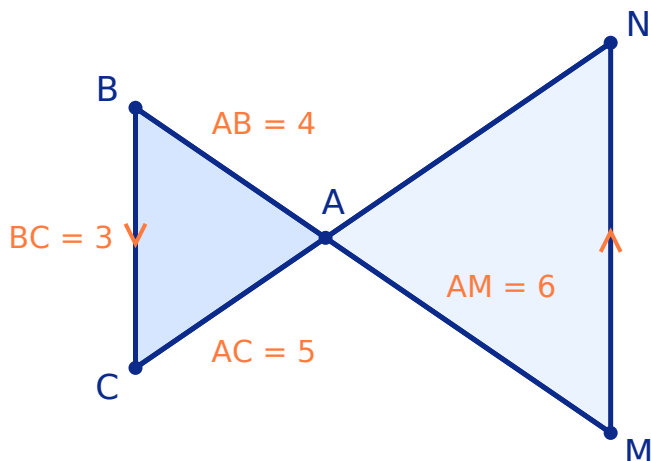
$$\mathbf{AM/AB = AN/AC = MN/BC.}$$

On calcule d'abord $AB = AM + MB = 3 + 4,5 = 7,5$ cm. Puis :

$$\mathbf{3/7,5 = 4/AC = MN/9.}$$

Donc $AC = 4 \times 7,5 \div 3 = 30 \div 3 = \mathbf{10\text{ cm}}$ et $MN = 3 \times 9 \div 7,5 = 27 \div 7,5 = \mathbf{3,6\text{ cm}}$.

Exemple 2 : configuration en papillon Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, et (BC) // (MN). On a AB = 4 cm, AM = 6 cm, AC = 5 cm et BC = 3 cm. Calculons AN et MN.



Rédaction. Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et (BC) // (MN). D'après le théorème de Thalès :

AM/AB = AN/AC = MN/BC, soit **6/4 = AN/5 = MN/3**.

Donc $AN = 5 \times 6 \div 4 = 7,5$ cm et $MN = 3 \times 6 \div 4 = 4,5$ cm. On trouve **AN = 7,5 cm**.

Le coefficient de proportionnalité Dans l'exemple 2, $6/4 = 1,5$: le triangle AMN est « 1,5 fois plus grand » que ABC. Toutes les longueurs de AMN s'obtiennent donc en multipliant celles de ABC par 1,5 : $AN = 5 \times 1,5 = 7,5$ et $MN = 3 \times 1,5 = 4,5$. C'est souvent plus rapide qu'un produit en croix !

Attention aux longueurs « entières » Dans l'exemple 1, on ne donne pas AB mais AM et MB. Il faut penser à additionner : $AB = AM + MB$. À l'inverse, $MB = AB - AM$. Si on oublie, on écrit des rapports faux.

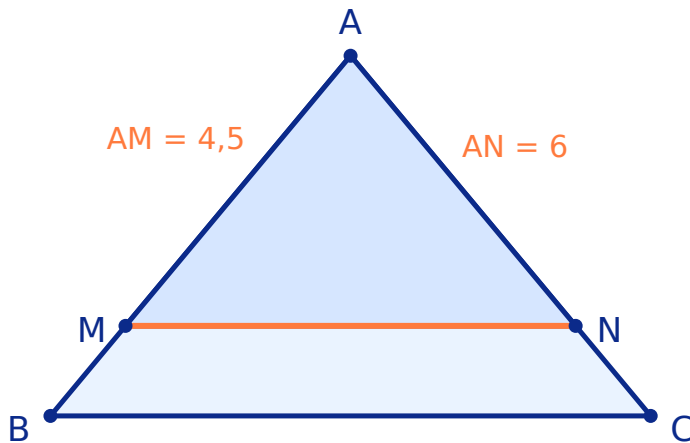
5. La réciproque : prouver que deux droites sont parallèles

Le théorème de Thalès part du parallélisme pour obtenir des égalités. La **réciproque** fait le chemin inverse : à partir d'égalités de rapports, elle permet de **conclure** que deux droites sont parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès Soit A un point, et deux droites (BM) et (CN) sécantes en A. Si les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont **alignés dans le même ordre**, et si **AM/AB = AN/AC**, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Méthode 1) Vérifie que les points sont alignés **dans le même ordre** (M et N du même côté de A que B et C pour des triangles emboîtés ; M et N de l'autre côté de A pour un papillon). 2) Calcule séparément les deux rapports **AM/AB** et **AN/AC** (en nombres décimaux ou en fractions simplifiées). 3) S'ils sont égaux, conclus avec la réciproque.

Exemple M est sur [AB] avec $AM = 4,5$ cm et $AB = 6$ cm ; N est sur [AC] avec $AN = 6$ cm et $AC = 8$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



- Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, et A, N, C aussi : c'est le même ordre.
- D'une part $\frac{AM}{AB} = \frac{4,5}{6} = 0,75$. D'autre part $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{8} = 0,75$.
- Donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (MN) et (BC) sont parallèles**.

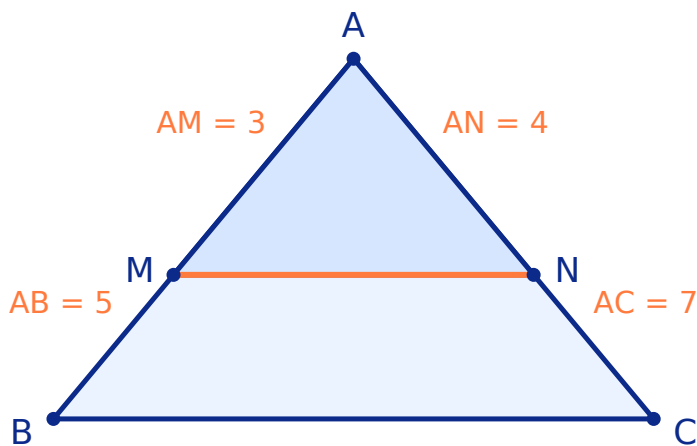
Ne pas confondre On utilise **Thalès** quand on **sait déjà** que deux droites sont parallèles et qu'on cherche une longueur. On utilise la **réciproque** quand on veut **démontrer** que deux droites sont parallèles. Pour la réciproque, on ne calcule que **deux** rapports : AM/AB et AN/AC (pas MN/BC , qu'on ne connaît pas).

6. Prouver que deux droites ne sont pas parallèles

Conséquence du théorème de Thalès Si $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont **différents** (avec les points alignés dans le même ordre), alors les droites (MN) et (BC) **ne sont pas parallèles**.

Pourquoi ? Si elles étaient parallèles, le théorème de Thalès dirait que les deux rapports sont égaux. Or ils ne le sont pas : c'est donc impossible. Cela s'appelle un raisonnement par contraposée.

Exemple M est sur [AB] avec $AM = 3$ cm et $AB = 5$ cm ; N est sur [AC] avec $AN = 4$ cm et $AC = 7$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



On compare les deux rapports : $\mathbf{AM/AB = 3/5 = 0,6}$ et $\mathbf{AN/AC = 4/7 \approx 0,571}$.

On peut aussi le vérifier avec les produits en croix : $3 \times 7 = 21$ alors que $5 \times 4 = 20$. Les deux produits sont différents, donc les rapports sont différents.

Si (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\mathbf{AM/AB = AN/AC}$. Ce n'est pas le cas, donc **(MN) et (BC) ne sont pas parallèles**.

Astuce de calcul Pour comparer deux rapports sans calculatrice, utilise les **produits en croix** : $\mathbf{a/b = c/d}$ exactement quand $a \times d = b \times c$. Cela évite les valeurs approchées des fractions comme $\mathbf{4/7}$.

Piège de l'ordre des points Si les points ne sont pas alignés dans le même ordre (par exemple M entre A et B, mais N de l'autre côté de A par rapport à C), alors même avec des rapports égaux, la réciproque ne s'applique pas. Vérifie toujours l'ordre avant de conclure.

7. Agrandissement et réduction

Le théorème de Thalès cache une idée plus générale : quand on **agrandit** ou **réduit** une figure, toutes ses longueurs sont multipliées par le même nombre. Le triangle AMN de l'exemple 2 est un agrandissement de ABC.

Agrandissement et réduction Agrandir ou réduire une figure, c'est multiplier toutes ses longueurs par un même nombre positif k , appelé le **coefficient** (ou rapport). Les angles ne changent pas. Si $k > 1$, c'est un **agrandissement** ; si $0 < k < 1$, c'est une **réduction** ; si $k = 1$, la figure est identique.

Effet sur les longueurs, les aires et les volumes Quand les longueurs sont multipliées par k :

- les **aires** sont multipliées par $\mathbf{k^2}$;
- les **volumes** sont multipliés par $\mathbf{k^3}$;

- les **angles** sont conservés.

Grandeur	Longueur	Aire	Volume
Multipliée par	k	$k \times k = k^2$	$k \times k \times k = k^3$
Exemple avec $k = 3$	$\times 3$	$\times 9$	$\times 27$
Exemple avec $k = 0,5$	$\times 0,5$	$\times 0,25$	$\times 0,125$

Exemple Un carré de côté 4 cm est agrandi avec $k = 2,5$. Son nouveau côté mesure $4 \times 2,5 = 10$ cm. Son aire passe de 16 cm^2 à 100 cm^2 : on vérifie $16 \times 2,5^2 = 16 \times 6,25 = 100$. Remarque : l'aire n'est pas multipliée par 2,5 mais par 6,25.

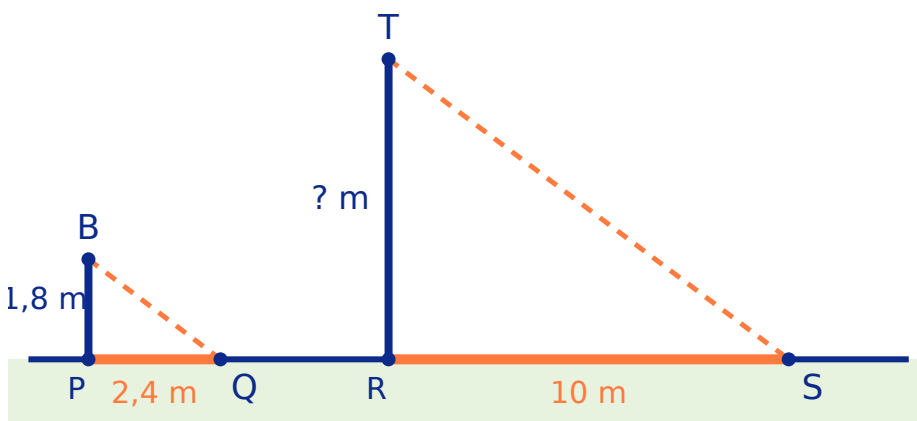
Erreur fréquente Doubler les côtés d'un carré ne double pas son aire : elle est multipliée par 4. De même, un cube dont on double l'arête a un volume 8 fois plus grand. Retiens : **k pour les longueurs, k^2 pour les aires, k^3 pour les volumes.**

Trouver le coefficient Pour trouver k , on divise une longueur de la figure obtenue par la longueur correspondante de la figure de départ. Exemple : un côté passe de 6 cm à 4 cm, donc $k = 4 \div 6 = \frac{2}{3}$: c'est une réduction.

8. Problèmes : ombres, hauteurs et distances

Thalès sert à mesurer ce qu'on ne peut pas toucher : la hauteur d'un arbre, la largeur d'une rivière, la distance entre deux points inaccessibles. L'idée : fabriquer un **petit triangle** qu'on peut mesurer, semblable au **grand triangle** qu'on ne peut pas mesurer.

L'ombre d'un arbre À midi en été, un bâton vertical PB de 1,80 m projette une ombre PQ de 2,40 m. Au même moment, un arbre vertical RT projette une ombre RS de 10 m. Quelle est la hauteur de l'arbre ?



Pourquoi peut-on appliquer Thalès ? Les rayons du soleil sont parallèles et le bâton comme l'arbre sont verticaux, donc perpendiculaires au sol. Si on glisse le petit triangle PBQ le long du sol jusqu'à faire coïncider le bout de son ombre Q avec le bout S de l'ombre

de l'arbre, on obtient deux triangles emboîtés : les deux verticales sont parallèles, donc on peut utiliser le théorème de Thalès. Les côtés sont proportionnels :

$$PB/RT = PQ/RS, \text{ soit } 1,8/RT = 2,4/10.$$

Donc $RT = 1,8 \times 10 \div 2,4 = 18 \div 2,4 = 7,5 \text{ m}$. L'arbre mesure 7,5 m de haut.

Bien rédiger un problème de Thalès 1) Fais un **schéma** et nomme les points. 2) **Justifie** le parallélisme (soleil, verticales, angles droits...). 3) Écris « D'après le théorème de Thalès » puis les rapports égaux. 4) Calcule. 5) Réponds par une **phrase avec l'unité** et vérifie que le résultat est vraisemblable (un arbre de 75 m serait suspect !).

Mathbot, le robot-coach, te souffle « Avant de te lancer dans les calculs, colorie en deux couleurs les deux triangles de la figure. Chaque rapport de Thalès doit comparer un côté de la première couleur avec le côté de la seconde qui lui correspond. Si tu mélanges, c'est le signal d'alerte ! »

À retenir

- Thalès s'applique avec **deux droites sécantes** (en A) coupées par **deux droites parallèles** : triangles emboîtés ou papillon.
- Si $(BC) \parallel (MN)$, alors **$AM/AB = AN/AC = MN/BC$** .
- Pour calculer une longueur : repérer la configuration, écrire les rapports égaux, remplacer, faire un produit en croix, conclure avec l'unité.
- **Réciproque** : si **$AM/AB = AN/AC$** et si les points sont alignés dans le même ordre, alors $(MN) \parallel (BC)$.
- Si **$AM/AB \neq AN/AC$** , alors (MN) et (BC) ne sont **pas** parallèles. On compare avec les produits en croix.
- Agrandir ou réduire de coefficient k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$, angles inchangés.
- Ne jamais écrire un rapport comme AM/MB : on compare toujours avec le côté entier du grand triangle.
- Dans un problème, on **justifie le parallélisme**, on cite le théorème, on calcule et on répond avec une phrase.