

Transformations du plan

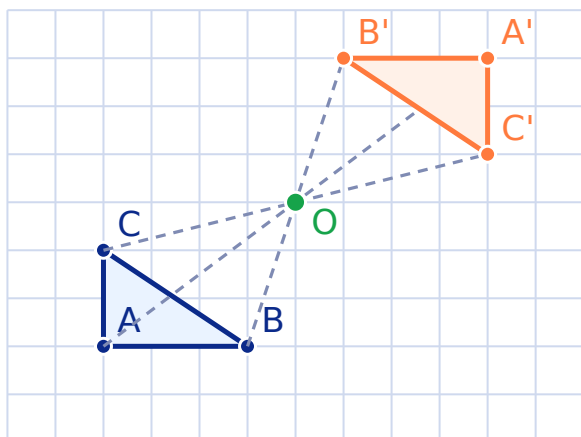
Cours de maths - 3ème

Une figure peut glisser, tourner, se retourner comme dans un miroir, ou grossir comme sous une loupe. Ces opérations s'appellent des **transformations du plan**. En 3ème, tu rassembles tout ce que tu connais (symétries, translations, rotations) et tu découvres une nouvelle venue, l'**homothétie**, qui agrandit ou réduit. Tu apprends à construire des images de figures, à dire ce qui est conservé ou non, puis à reconnaître des frises et des pavages.

1. Rappels : symétries axiale et centrale

Symétrie axiale Deux points A et A' sont **symétriques par rapport à une droite (d)** lorsque (d) est la **médiatrice** du segment [AA']. C'est l'effet d'un miroir : la figure est « retournée ».

Symétrie centrale Deux points A et A' sont **symétriques par rapport à un point O** lorsque O est le **milieu** de [AA']. C'est un demi-tour autour de O.



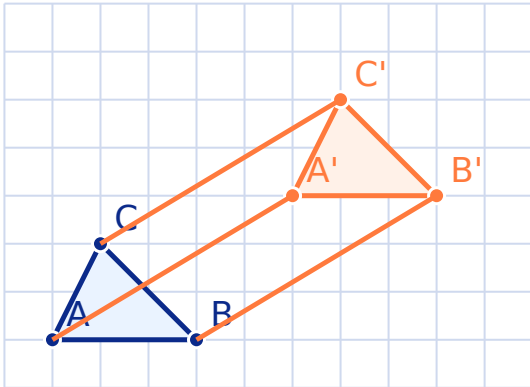
Le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la symétrie de centre O : O est le milieu de [AA'], de [BB'] et de [CC'].

Construire l'image d'une figure On construit l'image de **chaque sommet** (ou de quelques points bien choisis), puis on relie les images dans le même ordre. Pour un cercle, il suffit de construire l'image de son centre : le rayon ne change pas.

Axiale ou centrale ? La symétrie axiale change le sens de lecture de la figure (le « R » devient « Я »). La symétrie centrale la fait tourner d'un demi-tour mais ne la retourne pas. Ne confonds pas les deux !

2. La translation

Translation Une translation fait **glisser** toute la figure en ligne droite, dans une même direction, dans un même sens et sur une même distance, sans la tourner. Elle est définie par la donnée d'un point et de son image : « la translation qui transforme A en A' ».



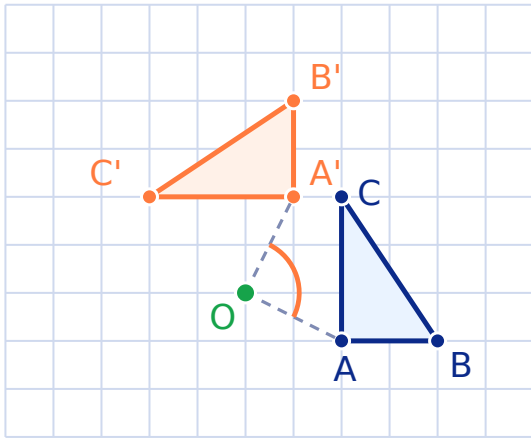
Ici, chaque point se déplace de 5 carreaux vers la droite et de 3 carreaux vers le haut.

Construire l'image d'un point M Pour la translation qui transforme A en A', on voit comment aller de A à A' (par exemple « 5 carreaux à droite, 3 en haut »). On refait exactement le même déplacement à partir de M. Les segments [AA'], [MM'] sont parallèles, de même longueur et de même sens ; AA'M'M est un **parallélogramme** (si A, A', M ne sont pas alignés).

Propriété Une translation transforme une droite en une droite **parallèle** à elle-même. Par la translation, chaque segment a pour image un segment parallèle de même longueur.

3. La rotation

Rotation Une rotation est définie par un **centre** O, un **angle** et un **sens** (horaire, comme les aiguilles d'une montre, ou antihoraire). L'image M' d'un point M vérifie : $OM' = OM$ et l'angle MOM' est égal à l'angle de la rotation, dans le bon sens. Le centre est sa propre image.



Rotation de centre O, d'angle 90° , dans le sens antihoraire : A va en A'. On a $OA = OA' = \sqrt{5}$ carreaux et l'angle AOA' mesure 90° .

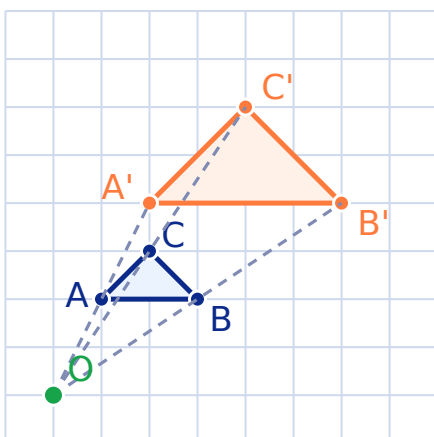
Construire l'image d'un point M par une rotation de centre O, d'angle α 1)

Trace le segment [OM]. 2) Avec le rapporteur, trace en O un angle α dans le sens demandé, à partir de [OM]. 3) Sur cette demi-droite, reporte la longueur OM au compas : tu obtiens M'. Sur un quadrillage, un quart de tour se fait « à l'équerre » : on tourne le déplacement de O vers M d'un quart de tour.

Cas particulier La rotation d'angle 180° de centre O est la **symétrie centrale** de centre O. Deux quarts de tour de suite dans le même sens font un demi-tour.

4. L'homothétie de rapport positif

Homothétie L'homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) transforme tout point M en un point M' tel que O, M et M' sont **alignés** et $OM' = |k| \times OM$. Si k est **positif**, M' est sur la demi-droite [OM) : M et M' sont du même côté de O.



Homothétie de centre O et de rapport 2 : $OA' = 2 \times OA$, $OB' = 2 \times OB$, $OC' = 2 \times OC$. Le triangle A'B'C' est un **agrandissement** de ABC.

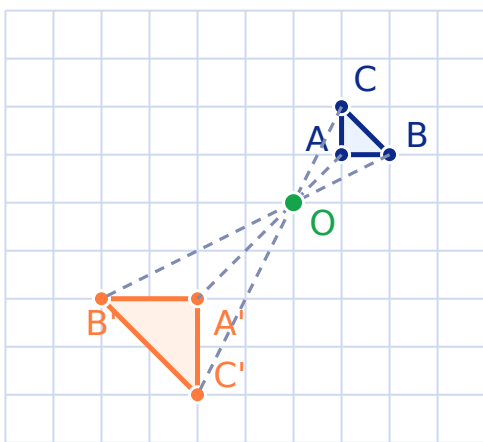
Agrandir ou réduire Si $k > 1$, la figure est **agrandie** ; si $0 < k < 1$, elle est **réduite** ;

si $k = 1$, elle ne bouge pas. Par exemple, une homothétie de rapport **1/3** divise toutes les longueurs par 3 : on obtient une réduction.

Construire l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k 1) Trace la droite (OM). 2) Mesure OM, calcule $k \times OM$. 3) Reporte cette longueur à partir de O sur la demi-droite [OM) : tu obtiens M'. Sur un quadrillage, on multiplie par k le déplacement de O vers M.

5. L'homothétie de rapport négatif

Rapport négatif Si k est **négatif**, M' est du côté **opposé** à M par rapport à O : O est entre M et M'. On a toujours $OM' = |k| \times OM$, par exemple $OM' = 2 \times OM$ si $k = -2$.



Homothétie de centre O et de rapport -2 : A', B' et C' sont de l'autre côté de O et deux fois plus loin. Le triangle semble « renversé » et agrandi.

Cas particuliers à connaître Le rapport 1 laisse tout en place. Le rapport -1 est la **symétrie centrale** de centre O. Deux homothéties de même centre, de rapports k et k', se suivent comme une homothétie de rapport $k \times k'$.

Exemple avec coordonnées Centre l'origine O(0 ; 0), rapport -3 , point A(2 ; -1). Les coordonnées sont multipliées par -3 : A'(-6 ; 3). Pour un centre quelconque $\Omega(a ; b)$, on calcule d'abord le déplacement de Ω vers le point, on le multiplie par k, puis on repart de Ω .

6. Agrandissement, réduction et grandeurs

Effet d'une homothétie de rapport k Les longueurs sont multipliées par $|k|$. Les angles ne changent pas. Les aires sont multipliées par k^2 . Dans l'espace, les volumes sont multipliés par $|k|^3$.

Exemple On agrandit un rectangle de 6 cm sur 4 cm avec $k = 2,5$. Dimensions : 15 cm sur 10 cm. Aire avant : 24 cm^2 . Aire après : $150 \text{ cm}^2 = 24 \times 2,5^2 = 24 \times 6,25$. Les

Fiche en ligne : maths-facile.eu/transformations-du-plan-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

angles droits restent droits.

Piège classique Doubler les longueurs ne double **pas** l'aire : elle est multipliée par 4. Pour un solide, doubler toutes les longueurs multiplie le volume par 8 !

Échelle Une maquette à l'échelle **1/50** est une réduction de rapport **1/50**. Une longueur de 3 m devient 6 cm. Son volume est divisé par $50^3 = 125\,000$.

7. Ce qui est conservé

Quand on transforme une figure, certaines propriétés restent les mêmes. Le tableau les résume.

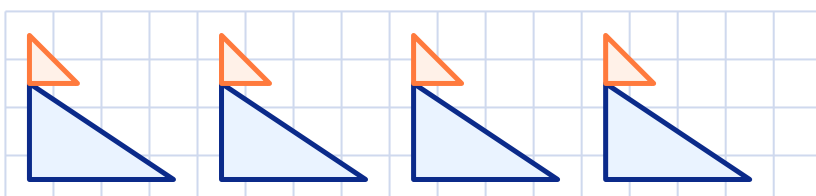
	Symétries, translation, rotation	Homothétie de rapport k
Alignement, parallélisme	conservés	conservés
Angles	conservés	conservés
Longueurs	conservées	multipliées par $ k $
Aires	conservées	multipliées par k^2
Image d'une droite	une droite (parallèle pour la translation, la symétrie centrale et l'homothétie)	une droite parallèle

Vocabulaire Les transformations qui conservent les longueurs (symétries, translation, rotation) donnent une figure **de même forme et de même taille** : l'image est « superposable » à l'original. L'homothétie donne une figure de **même forme**, mais de taille différente (sauf si $k = 1$ ou -1).

Mathbot Pour reconnaître une transformation, pose-toi trois questions : la figure a-t-elle **glissé** sans tourner (translation) ? a-t-elle **tourné** (rotation) ? a-t-elle **changé de taille** (homothétie) ?

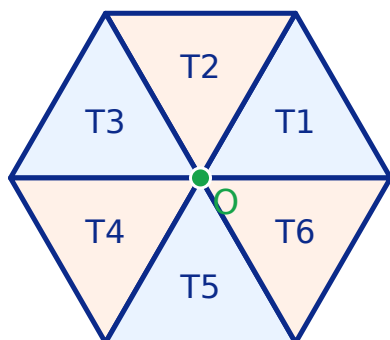
8. Frises et pavages

Frise Une frise est une bande dans laquelle un **motif** se répète à intervalles réguliers. Le plus souvent, on passe d'un motif au suivant par une **translation**.



Chaque motif est l'image du précédent par la translation de 4 carreaux vers la droite.

Pavage Un pavage recouvre tout le plan avec des figures identiques, sans trou ni chevauchement. Autour de chaque sommet, la somme des angles doit faire **360°**.



Six triangles équilatéraux autour de O. T2 est l'image de T1 par la rotation de centre O, d'angle 60°.

Pourquoi ça marche ? Un triangle équilatéral a des angles de 60° : $6 \times 60^\circ = 360^\circ$. Un carré a des angles de 90° : $4 \times 90^\circ = 360^\circ$. Un hexagone régulier a des angles de 120° : $3 \times 120^\circ = 360^\circ$. Mais un pentagone régulier (108°) ne pave pas : $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ laisse un trou, et $4 \times 108^\circ = 432^\circ$ se chevauche.

9. Composer des transformations

Composer Composer deux transformations, c'est en effectuer une, puis l'autre sur l'image obtenue. L'ordre peut avoir de l'importance !

Quelques compositions utiles Deux translations successives sont équivalentes à une translation. Deux rotations de même centre s'ajoutent : 90° puis 90° dans le même sens font 180°. Deux symétries centrales de centres O_1 puis O_2 font une translation : le point glisse du double du déplacement de O_1 à O_2 .

Exemple Soit $A(1 ; 1)$, $O_1(3 ; 2)$, $O_2(6 ; 0)$. Par la symétrie de centre O_1 , A devient $A_1(5 ; 3)$. Par la symétrie de centre O_2 , A_1 devient $A_2(7 ; -3)$. Le passage de A à A_2 est une translation de $(+6 ; -4)$, qui est bien le double du déplacement de O_1 à O_2 $(+3 ; -2)$.

Méthode pour reconnaître une transformation 1) Compare la forme et la taille : si la taille change, c'est une homothétie. 2) Sinon, regarde si la figure est retournée (symétrie axiale) ou non. 3) Si elle est dans le même sens : sans tourner, c'est une translation ; en tournant, une rotation (ou une symétrie centrale si c'est un demi-tour). 4) Pour trouver le centre, trace des droites reliant des points et leurs images.

À retenir

- Translation : on **glisse** ; définie par « A devient A' » ; l'image d'une droite est parallèle.
- Rotation : centre, **angle**, **sens** ; $OM' = OM$; 180° = symétrie centrale.
- Homothétie de centre O et de rapport k : O, M, M' alignés et $OM' = |k| \times OM$; k > 0 même côté, k < 0 côté opposé ; k = -1 : symétrie centrale.
- Symétries, translation, rotation conservent longueurs, angles, aires, parallélisme.
- Homothétie de rapport k : longueurs $\times |k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times |k|^3$, angles inchangés.
- Une frise se répète par translation ; un pavage a 360° autour de chaque sommet.
- Deux symétries centrales de suite donnent une translation.