

Transformations géométriques

Corrigé des exercices - 5ème

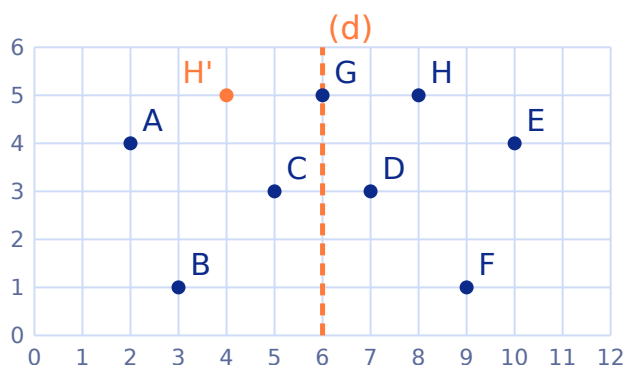
Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Points symétriques par rapport à une droite ★★★

a. Le point A est à 4 carreaux à gauche de l'axe, le point E à 4 carreaux à droite, sur la même ligne (ordonnée 4) : A et E sont symétriques. De même B (3 ; 1) et F (9 ; 1) sont à 3 carreaux de l'axe, et C (5 ; 3) et D (7 ; 3) sont à 1 carreau de l'axe. Les couples sont donc **(A ; E)**, **(B ; F)** et **(C ; D)**.

b. Le point G (6 ; 5) est sur l'axe : il est son propre symétrique.

c. H (8 ; 5) est à 2 carreaux à droite de l'axe. Son symétrique est à 2 carreaux à gauche, à la même hauteur : H' **(4 ; 5)**.



2 Vrai ou faux ? (axiale) ★★★

a. **Vrai.** La symétrie axiale conserve les longueurs.

b. **Vrai.** L'axe est la médiatrice de [AA'] : il passe par le milieu de [AA'] et lui est perpendiculaire.

c. **Faux.** Les angles sont conservés : l'angle symétrique de 40° mesure encore 40°.

d. **Faux.** Un point de l'axe est son propre symétrique : il ne change pas de place.

e. **Vrai.** La symétrie conserve les aires : le symétrique a une aire de 12 cm².

3 Déplacements sur le quadrillage ★★★

Pour passer de O à A', on fait le déplacement **contraire** de celui qui mène de O à A.

- a. A' est à 4 carreaux à droite et 3 carreaux au-dessus de O.
- b. B' est à 2 carreaux à gauche et 5 carreaux en dessous de O.
- c. C' est à 3 carreaux à gauche de O, sur la même ligne.
- d. D' = O : le centre est son propre symétrique.

4 Le milieu du segment ★★★

- a. O est le milieu de [MM'], donc $OM' = OM = 3,4 \text{ cm}$. Alors $MM' = 3,4 + 3,4 = 6,8 \text{ cm}$.
- b. O est le milieu de [PP'], donc $OP = PP' \div 2 = 9 \div 2 = 4,5 \text{ cm}$.
- c. Oui. R, O et S sont alignés et $RO = OS$: O est le milieu de [RS]. Donc S est le symétrique de R par rapport à O.

5 Axes et centre des lettres ★★★

Lettre	Axes	Centre
H	2 (un vertical, un horizontal)	oui
A	1 (vertical)	non
Z	0	oui
E	1 (horizontal)	non
X	2 (vertical et horizontal)	oui
L	0	non
F	0	non

Le Z se superpose à lui-même après un demi-tour, mais aucun pliage ne le recouvre : il a un centre et pas d'axe.

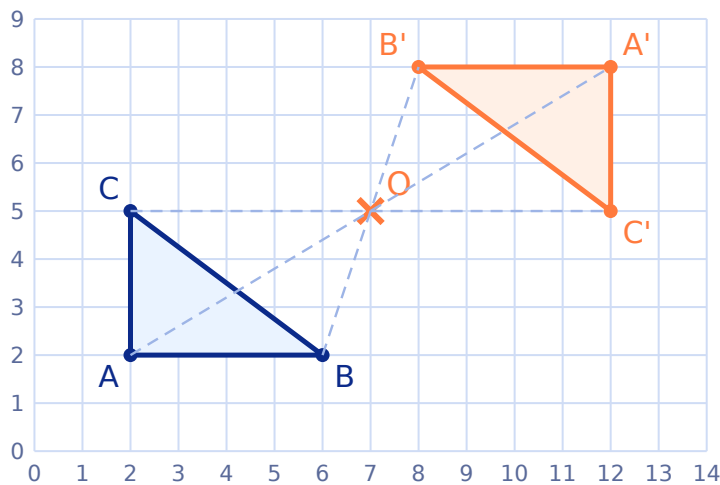
6 Image d'un triangle par un demi-tour ★★★

- a. Pour chaque sommet, on inverse le déplacement depuis O. A (2 ; 2) est à 5 carreaux à gauche et 3 en dessous de O (7 ; 5) : A' est à 5 carreaux à droite et 3 au-dessus, donc A' (12 ; 8). De même B' (8 ; 8) et C' (12 ; 5).

- b. La symétrie centrale conserve les longueurs, les angles et les aires. Donc $A'B' = AB = 4 \text{ cm}$, $\angle B'A'C' = \angle BAC = 90^\circ$, le périmètre est $4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$ et l'aire vaut $4 \times$

$$3 \div 2 = 6 \text{ cm}^2.$$

c. Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle : $(A'B') \parallel (AB)$.

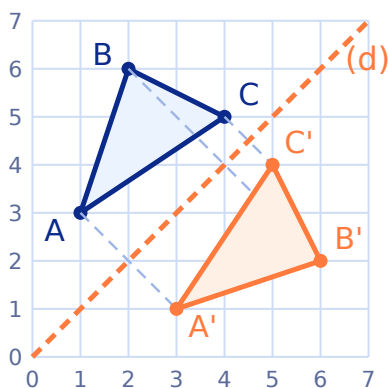


7 Longueurs, angles, périmètre ★★★

- a. La symétrie centrale conserve les longueurs : $E'F' = EF = 5 \text{ cm}$, $F'G' = FG = 3,5 \text{ cm}$, $E'G' = EG = 6 \text{ cm}$.
- b. Elle conserve les angles : $\angle E'F'G' = \angle EFG = 88^\circ$.
- c. Périmètre : $5 + 3,5 + 6 = 14,5 \text{ cm}$.
- d. Elle conserve les aires : l'aire de $E'F'G'$ est aussi d'environ $8,7 \text{ cm}^2$.

8 Un axe en diagonale ★★★

- a. On construit la perpendiculaire à (d) en suivant les diagonales de carreaux. Voir la figure ci-dessous.
- b. $A' (3 ; 1)$, $B' (6 ; 2)$ et $C' (5 ; 4)$. Pour un axe qui est la diagonale du quadrillage, on échange les deux coordonnées : A (1 ; 3) devient A' (3 ; 1), etc.



9 Deux symétries à la suite sur une droite ★★★

a. $AC = AB + BC = 3 + 2 = 5 \text{ cm}$. Comme C est le milieu de [AD], $CD = CA = 5 \text{ cm}$ et $AD = 5 + 5 = 10 \text{ cm}$.

b. B est le milieu de [CE], donc $BE = BC = 2 \text{ cm}$, et E est de l'autre côté de B par rapport à C. Donc E est sur [AB]. On a $AE = AB - BE = 3 - 2 = 1 \text{ cm}$.

c. Sur la droite, avec A comme origine : D est à 10 cm et E à 1 cm. Donc $DE = 10 - 1 = 9 \text{ cm}$.

10 Diagonales d'un parallélogramme ★★★

a. O est le milieu des diagonales : $OA = OC = 9,4 \div 2 = 4,7 \text{ cm}$ et $OB = OD = 6 \div 2 = 3 \text{ cm}$.

b. Le demi-tour de centre O envoie A sur C et B sur D, donc l'angle $\angle AOB$ sur l'angle $\angle COD$. La symétrie centrale conserve les angles : $\angle COD = 70^\circ$.

c. A, O, C sont alignés : les angles $\angle AOB$ et $\angle BOC$ sont supplémentaires. $\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

d. $AOB : 4,7 + 3 + 4,6 = 12,3 \text{ cm}$. $COD : CD = AB = 4,6 \text{ cm}$ (côtés opposés), donc $4,7 + 3 + 4,6 = 12,3 \text{ cm}$. Les deux périmètres sont égaux, car les triangles sont symétriques par rapport à O.

11 Est-ce un parallélogramme ? ★★★

a. Oui. I est le milieu de [MP] ($IM = IP$, avec M, I, P alignés) et le milieu de [NQ] ($IN = IQ$). Or si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. MNPQ est un parallélogramme.

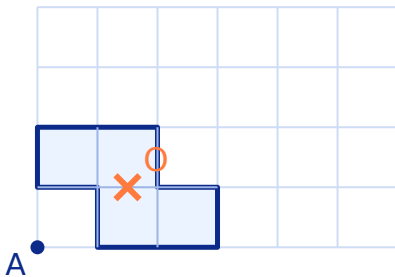
b. Non. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, donc on aurait $IM = IP$. Ici $IM = 2,6 \text{ cm} \neq IP = 2,5 \text{ cm}$: I n'est pas le milieu de [MP] et MNPQ n'est

pas un parallélogramme.

12 Cherche le centre ★★★

a. Oui. Le sommet en bas à droite du carreau du haut est le symétrique du sommet en bas à gauche du carreau du bas, etc. Le centre est le point O situé au milieu du segment commun aux deux carreaux du milieu (il est à 1,5 carreau du bord gauche et à 1 carreau du bas). Chaque sommet a pour symétrique le sommet opposé : $(1 ; 0) \leftrightarrow (2 ; 2)$, $(3 ; 0) \leftrightarrow (0 ; 2)$, $(3 ; 1) \leftrightarrow (0 ; 1)$, $(2 ; 1) \leftrightarrow (1 ; 1)$.

b. Non. Aucun pliage ne superpose les deux moitiés : un axe vertical, horizontal ou diagonal ne convient pas, car la figure est « penchée ». C'est une figure qui a un centre mais pas d'axe, comme la lettre Z.



13 Trouve l'erreur dans les constructions ★★★

a. Faux. L'axe doit être perpendiculaire à (AA') (c'est la médiatrice de $[AA']$), pas parallèle.

b. Faux. La perpendiculaire est bonne, mais A et A' doivent être à la même distance de (d).

c. Juste. (d) est perpendiculaire à (AA') et passe par le milieu de $[AA']$: c'est bien la construction du symétrique.

Tom : faux. Il faut placer A' de **l'autre côté** de O. S'il est du même côté, il se confond avec A (puisque $OA' = OA$) et O n'est pas le milieu de $[AA']$.

14 Polygones réguliers ★★★

Polygone	Triangle équilatéral	Carré	Pentagone	Hexagone	Heptagone	Octogone
Axes	3	4	5	6	7	8
Centre	non	oui	non	oui	non	oui

Règle : un polygone régulier à n côtés a **n axes de symétrie**, et il a un **centre de**

symétrie quand n est pair.

Pour 12 côtés : **12 axes** et **un centre** (12 est pair).

15 Pièces d'un pavage ★★★

On repère à chaque fois la pièce qui se trouve à l'opposé de la pièce de départ, de l'autre côté du point.

- a. La pièce **2**.
- b. La pièce **5**.
- c. La pièce **10**.

16 Étudier une frise ★★★

- a. Oui. Chaque triangle est isocèle : la droite verticale qui passe par sa pointe est un axe de symétrie de toute la frise (et il y en a une infinité, un par triangle).
- b. Non. Un axe horizontal enverrait un triangle pointe en haut sur un triangle pointe en bas, mais décalé d'un demi-motif : il ne coïncide avec aucun triangle de la frise.
- c. Oui. Le milieu du côté oblique commun à deux triangles voisins est un centre de symétrie : un demi-tour autour de ce point échange le triangle pointe en haut et le triangle pointe en bas voisin. Il y a une infinité de tels centres.

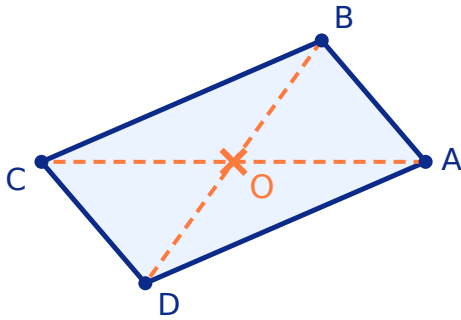
17 Un programme de construction ★★★

Programme de construction :

1. Trace un segment [OA] de 3,2 cm.
2. Avec le rapporteur, trace en O un angle de 54° avec [OA] ; place B sur le côté de l'angle tel que $OB = 2,5$ cm.
3. Place C, symétrique de A par rapport à O : O est le milieu de [AC], donc $OC = 3,2$ cm.
4. Place D, symétrique de B par rapport à O : $OD = 2,5$ cm.
5. Trace le quadrilatère ABCD.

Justification : les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O, donc ABCD est un parallélogramme (propriété du cours).

Dimensions : $CD = AB \approx 2,7$ cm (côtés opposés, symétrie centrale). $BC \approx 5,1$ cm et $AD = BC$ (côtés opposés). Périmètre $\approx 2 \times (2,7 + 5,1) = 2 \times 7,8 = \mathbf{15,6 \text{ cm}}$, que l'on peut vérifier en mesurant les côtés sur ta figure.



18 Deux demi-tours de suite ★★★

- a.** Premier demi-tour (centre P) : la pièce 1 arrive sur la pièce **8**. Deuxième demi-tour (centre K) : la pièce 8 arrive sur la pièce **10**.
- b.** Deux demi-tours de centres différents, l'un après l'autre, reviennent à faire **glisser** la pièce (sans la retourner ni la tourner) : la pièce 10 a la même orientation que la pièce 1. Le glissement est égal au double de la distance de P à K, dans la direction de (PK).

19 Coordonnées et symétries ★★★

- a.** Le milieu de $[AA']$ est O. Pour chaque coordonnée : coordonnée de $A' = 2 \times$ coordonnée de O – coordonnée de A. A' : abscisse $2 \times 4 - 2 = 6$, ordonnée $2 \times 4 - 3 = 5$, donc $A' (6 ; 5)$. B' : abscisse $2 \times 4 - 7 = 1$, ordonnée $2 \times 4 - 6 = 2$, donc $B' (1 ; 2)$.
- b.** La symétrie centrale est « réversible » : C est le symétrique de C' par rapport à O. Abscisse $2 \times 4 - 6 = 2$, ordonnée $2 \times 4 - 4 = 4$: C **(2 ; 4)**.
- c.** L'axe passe par le milieu de $[MM']$: abscisse $(1 + 9) \div 2 = 5$. L'axe (d) est la droite verticale d'abscisse **5**.

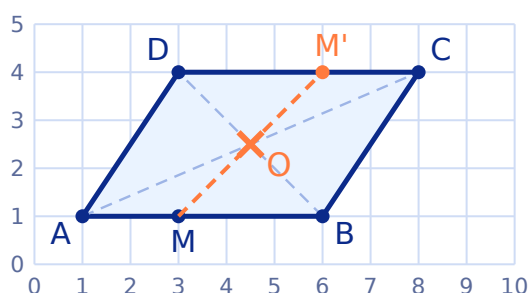
20 Le parc en parallélogramme ★★★

- a.** M' est le symétrique de M par rapport à O : il est sur la diagonale $[AC]$, de l'autre côté de O, à 35 m de O (du côté de C). $MM' = 2 \times 35 = \mathbf{70 \text{ m}}$.
- b.** O est le milieu de $[AC]$: $OC = 120 \div 2 = 60 \text{ m}$. M' est sur $[OC]$ à 35 m de O, donc $M'C = 60 - 35 = \mathbf{25 \text{ m}}$.
- c.** $OB = 90 \div 2 = 45 \text{ m}$ et $OC = 60 \text{ m}$. Périmètre du triangle OBC : $45 + 60 + 80 = \mathbf{185 \text{ m}}$.

Phrase réponse : l'arbre M' est à 35 m de la fontaine, du côté de C, soit à 25 m du sommet C.

21 Démonstration avec un parallélogramme ★★★

- a.** O est le centre de symétrie du parallélogramme : A a pour symétrique C et B a pour symétrique D. Le symétrique de [AB] est donc le segment **[CD]**.
- b.** M appartient à [AB]. La symétrie centrale conserve l'alignement et envoie [AB] sur [CD] : le symétrique M' de M appartient donc à [CD].
- c.** A et M ont pour symétriques C et M'. La symétrie centrale conserve les longueurs, donc $CM' = AM$. (Sur la figure, A (1 ; 1), M (3 ; 1), M' (6 ; 4) et C (8 ; 4) : $AM = 2$ carreaux et $CM' = 2$ carreaux.)



22 Rosaces ★★★

- a.** Les axes passent par le centre et le milieu de chaque pétale : **5 axes**. Pas de centre de symétrie : un demi-tour enverrait un pétale sur le côté opposé, où il n'y a pas de pétale (5 est impair).
- b.** Avec 6 pétales : **6 axes** et **un centre de symétrie** (6 est pair, chaque pétale est en face d'un autre).
- c.** Le pétale rouge n'a pas de symétrique rouge : un demi-tour ou un pliage le recouvrirait par un pétale d'une autre couleur, sauf pour l'axe qui passe par le pétale rouge lui-même. Il reste **1 axe** (celui qui passe par le pétale rouge et son opposé) et **plus de centre**.