

Transformations géométriques

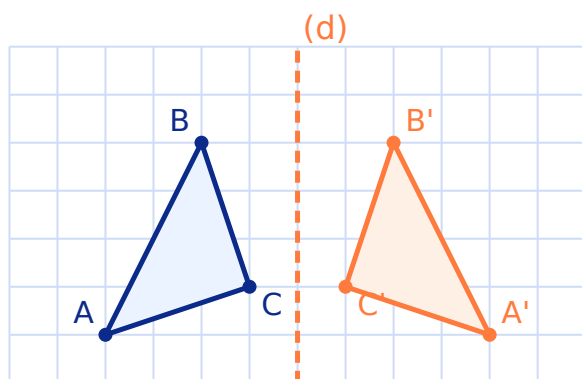
Cours de maths - 5ème

Tu connais déjà la **symétrie axiale** : le pliage, le miroir. Dans ce chapitre, tu la retrouves vite, puis tu découvres une nouvelle transformation, la **symétrie centrale** (le « demi-tour »). Tu apprends à construire des figures symétriques, à reconnaître les **axes** et les **centres de symétrie**, à utiliser ce qui est conservé, et enfin à repérer ces symétries dans les **frises**, les **pavages** et les **rosaces**.

1. Rappel : la symétrie axiale

Figures symétriques par rapport à une droite Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite (d)** quand elles se superposent exactement lorsqu'on plie la feuille le long de (d). La droite (d) s'appelle l'**axe de symétrie**.

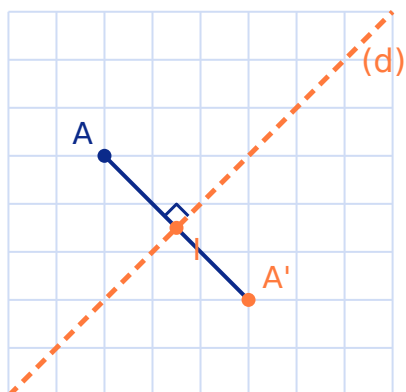
Symétrique d'un point Le point A' est le **symétrique du point A** par rapport à la droite (d) quand (d) est la **médiatrice** du segment [AA'], c'est-à-dire quand (d) est **perpendiculaire** à (AA') et passe par le **milieu** de [AA']. Si A est sur l'axe, son symétrique est lui-même.



Le triangle orange est le symétrique du triangle bleu par rapport à l'axe (d) en pointillés. Chaque point est à la même distance de l'axe que son symétrique.

Construire le symétrique d'un point à l'équerre et au compas

1. Avec l'équerre, trace la perpendiculaire à (d) passant par A. Elle coupe (d) en I.
2. Avec le compas (ou la règle graduée), reporte la longueur AI de l'autre côté de (d) : tu obtiens A' sur la perpendiculaire, avec $IA' = IA$.
3. Répète pour chaque sommet, puis relie les symétriques dans le même ordre que la figure de départ.



L'axe (d) coupe le segment $[AA']$ en son milieu I, à angle droit.

Sur un quadrillage Si l'axe suit une ligne du quadrillage, compte les carreaux entre le point et l'axe, puis reporte le même nombre de carreaux de l'autre côté. Si l'axe est une diagonale, échange simplement « combien de carreaux vers la droite » et « combien vers le haut ».

2. Propriétés de la symétrie axiale

Ce que la symétrie axiale conserve Deux figures symétriques par rapport à une droite ont les **mêmes longueurs**, les **mêmes mesures d'angles**, le **même périmètre** et la **même aire**. Des points alignés ont des symétriques alignés. Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.

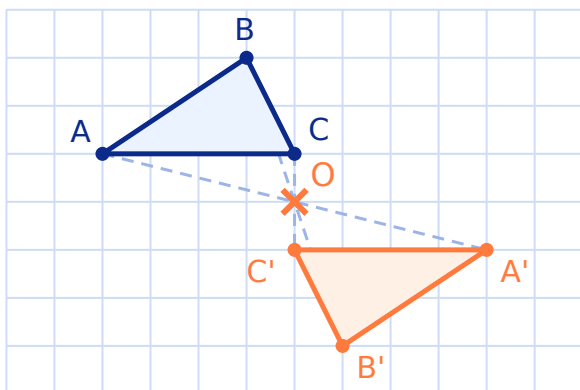
Exemple Un triangle EFG a un angle de 35° en F et un côté $[EG]$ de 6 cm. Son symétrique $E'F'G'$ par rapport à une droite a aussi un angle de 35° en F' et un côté $[E'G']$ de 6 cm.

Attention au retournement Une figure et son symétrique axial ont la même forme et la même taille, mais elles sont « retournées » comme dans un miroir : l'ordre des sommets A, B, C tourne dans un sens, celui de A', B', C' dans l'autre. Pour superposer les deux figures, il faut donc les **retourner**, pas seulement les glisser.

3. La symétrie centrale (ou demi-tour)

Figures symétriques par rapport à un point Deux figures sont **symétriques par rapport à un point O** quand elles se superposent en faisant un **demi-tour** (un tour de 180°) autour de O. On dit qu'on effectue une **symétrie centrale de centre O**.

Symétrique d'un point Le point A' est le **symétrique du point A** par rapport au point O quand **O est le milieu du segment $[AA']$** . Les points A, O et A' sont donc alignés et $OA = OA'$. Le centre O est son propre symétrique.



Chaque point et son symétrique sont alignés avec le centre O, de part et d'autre, à égale distance.

Construire le symétrique d'un point A par rapport à O

1. Trace la droite (AO) à la règle.
2. Avec le compas (ou la règle graduée), mesure la longueur OA.
3. Reporte-la à partir de O, **de l'autre côté** de A : tu obtiens A' tel que $OA' = OA$.

Sur un quadrillage Compte le déplacement pour aller de O à A (par exemple 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut). Pour aller de O à A', fais le déplacement **contraire** : 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas.

Deux symétries différentes La symétrie centrale n'a pas d'axe : il n'y a pas de pliage, mais un demi-tour. Ne mélange pas « symétrique par rapport à une droite » (axiale) et « symétrique par rapport à un point » (centrale).

4. Le symétrique d'une figure par symétrie centrale

Pour construire le symétrique d'une figure, on construit d'abord le symétrique de ses **points importants** (les sommets d'un polygone, deux points d'une droite, le centre d'un cercle), puis on les relie.

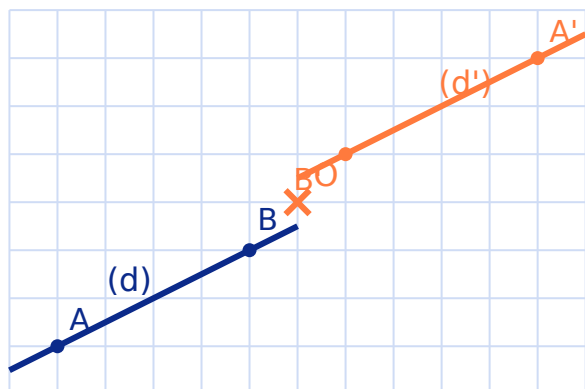
Symétrique d'un polygone

1. Construis le symétrique de chaque sommet par rapport à O.
2. Relie les symétriques dans le même ordre que les sommets de départ.
3. Vérifie : chaque côté de la nouvelle figure doit avoir la même longueur que son côté de départ.

Segments, droites, cercles

- Le symétrique d'un segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur.
- Le symétrique d'une droite (d) est une **droite parallèle** à (d).

- Le symétrique d'un cercle de centre C et de rayon r est le cercle de centre C' (symétrique de C) et de même rayon r.



La droite (d) et son image (d') par le demi-tour de centre O sont parallèles.

Exemple Un cercle de centre C et de rayon 3 cm est tracé. Le point O est à 8 cm de C. Le symétrique de C par rapport à O est le point C' tel que O est le milieu de [CC'] : $CC' = 2 \times 8 = 16$ cm. Le symétrique du cercle est le cercle de centre C' et de rayon 3 cm.

5. Ce que la symétrie centrale conserve

Propriétés de conservation La symétrie centrale conserve les **longueurs**, les **mesures d'angles**, les **aires**, l'**alignement** et le **parallélisme**. Ainsi deux figures symétriques par rapport à un point ont le même périmètre et la même aire.

Exemple Le triangle KLM a pour périmètre 21 cm et un angle droit en L. Son symétrique K'L'M' par rapport à un point O a aussi un périmètre de 21 cm et un angle droit en L'. De plus, (K'L') est parallèle à (KL).

Voici de quoi comparer les deux symétries.

	Symétrie axiale	Symétrie centrale
Élément de la transformation	une droite (l'axe)	un point (le centre)
Mouvement pour superposer	retournement (pliage)	demi-tour
Si A' est le symétrique de A	l'axe est la médiatrice de [AA']	le centre est le milieu de [AA']
Longueurs, angles, aires	conservés	conservés
Image d'une droite	une droite (en général pas parallèle)	une droite parallèle

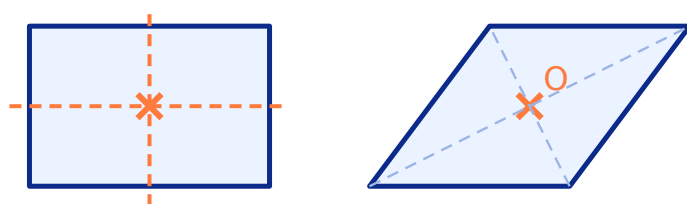
Astuce de Mathbot Pour contrôler une construction, mesure une longueur et un angle sur la figure de départ et sur son symétrique. S'ils ne sont pas égaux, il y a une erreur

Fiche en ligne : maths-facile.eu/transformations-geometriques-cours-5eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

6. Axes et centre de symétrie d'une figure

Axe de symétrie Une droite (d) est un **axe de symétrie** d'une figure quand le symétrique de la figure par rapport à (d) est la figure elle-même. On plie la figure en deux moitiés qui se recouvrent.

Centre de symétrie Un point O est un **centre de symétrie** d'une figure quand le symétrique de la figure par rapport à O est la figure elle-même. Un demi-tour autour de O ne change pas la figure.



rectangle : 2 axes, un centre de symétrie
parallélogramme : pas d'axe, un centre

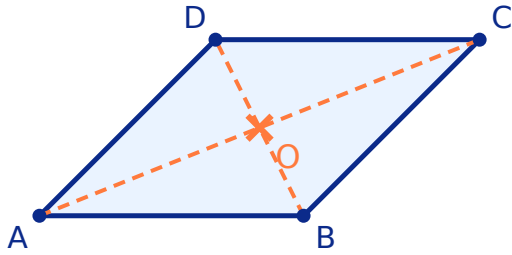
Figure	Axes de symétrie	Centre de symétrie
Triangle quelconque	0	non
Triangle isocèle (non équilatéral)	1	non
Triangle équilatéral	3	non
Rectangle (non carré)	2	oui
Losange (non carré)	2	oui
Carré	4	oui
Parallélogramme (ni rectangle, ni losange)	0	oui
Cercle	une infinité (tous les diamètres)	oui, son centre

Polygones réguliers Un polygone régulier à n côtés a n axes de symétrie. Il a un centre de symétrie seulement quand n est **pair**.

Exemple L'hexagone régulier a 6 axes et un centre de symétrie. Le pentagone régulier a 5 axes mais pas de centre de symétrie.

Piège classique Les diagonales d'un rectangle ne sont **pas** des axes de symétrie (sauf pour un carré). Les axes d'un rectangle sont les droites qui passent par les milieux des côtés opposés.

7. Le parallélogramme et la symétrie centrale



Centre de symétrie du parallélogramme Un parallélogramme a pour **centre de symétrie** le point O où se coupent ses diagonales. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu.

Dans ABCD, le demi-tour de centre O envoie A sur C et B sur D, donc le côté [AB] sur le côté [CD], et [BC] sur [DA]. On en déduit que les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, et que les angles opposés sont égaux.

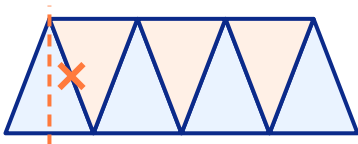
Réciproque Si un quadrilatère a ses **diagonales qui se coupent en leur milieu**, alors c'est un **parallélogramme**.

Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme Montre que les deux diagonales ont le **même milieu** (par exemple $IM = IP$ et $IN = IQ$ avec M, I, P alignés et N, I, Q alignés). Cite la propriété : « Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme ».

8. Frises, pavages et rosaces

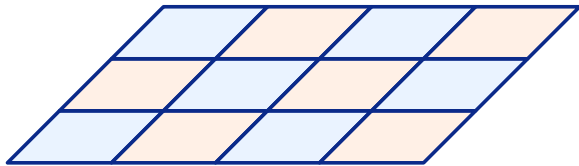
Les symétries se cachent partout dans l'art et l'architecture. On les repère avec les mots que tu viens d'apprendre.

Frise Une **frise** est une bande où un même motif se répète régulièrement dans une direction (carrelage de bordure, décor d'un vase...).



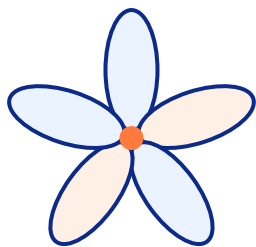
Cette frise a des axes de symétrie verticaux (l'un d'eux est en pointillés) et des centres de symétrie au milieu des côtés obliques (l'un d'eux est marqué par une croix). Elle n'a pas d'axe horizontal.

Pavage Un **pavage** recouvre le plan avec des pièces identiques, sans trou ni chevauchement. Tous les parallélogrammes peuvent paver le plan.



Dans ce pavage, chaque pièce est l'image d'une autre par une symétrie centrale de centre un sommet ou le milieu d'un côté commun.

Rosace Une **rosace** est un motif construit autour d'un centre, avec des éléments qui se répètent autour de ce point.



Une rosace à 5 pétales : 5 axes de symétrie, mais pas de centre de symétrie.

Analyser une frise, un pavage ou une rosace

1. Repère le **motif de base** qui se répète.
2. Cherche les **axes** : y a-t-il une droite qui plie la figure en deux moitiés qui se recouvrent ?
3. Cherche les **centres** : un demi-tour autour d'un point laisse-t-il la figure inchangée ?
4. Donne le nombre d'axes et dis s'il y a un centre.

À retenir

- Symétrie axiale : l'axe est la médiatrice de $[AA']$. Symétrie centrale : le centre O est le milieu de $[AA']$.
- Les deux symétries conservent les longueurs, les angles, les aires, le périmètre, l'alignement.
- La symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle.
- Pour construire une figure symétrique : on construit le symétrique de chaque sommet, puis on relie.
- Une figure peut avoir des axes de symétrie et/ou un centre de symétrie : triangle équilatéral 3 axes, rectangle et losange 2 axes et un centre, parallélogramme un centre, cercle une infinité d'axes et un centre.
- Polygone régulier à n côtés : n axes, un centre si n est pair.
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, qui est son centre de symétrie.

- Dans une frise, un pavage ou une rosace, on cherche le motif, les axes et les centres.