

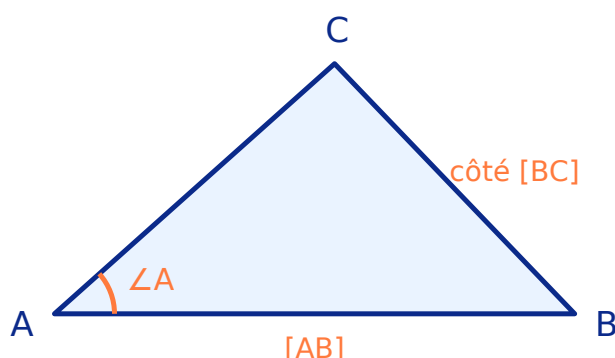
Triangles

Cours de maths - 5ème

Pylônes, toits, charpentes, voiles de bateau, pointes de pizza : le **triangle** est la forme la plus solide et la plus répandue autour de nous. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à savoir **si un triangle existe**, à le **construire**, à reconnaître les triangles **particuliers**, à calculer ses **angles**, à tracer ses **médiatrices** et ses **hauteurs**, puis à calculer son **aire**.

1. Rappels et vocabulaire

Triangle Un **triangle** est une figure plane fermée qui possède **trois sommets**, **trois côtés** (des segments) et **trois angles**. On le nomme avec les lettres de ses sommets : le triangle ABC.



Le côté [BC] est le côté **opposé** au sommet A. L'angle $\angle BAC$ (ou plus simplement $\angle A$) est l'angle de sommet A : il est formé par les côtés [AB] et [AC].

- Le **périmètre** d'un triangle est la somme des longueurs de ses trois côtés : $P = AB + BC + CA$.
- Sur une figure, on **code** les côtés de même longueur avec le même nombre de petits traits et l'angle droit avec un petit carré.
- Un triangle dont on ne sait rien de particulier est dit **quelconque**.

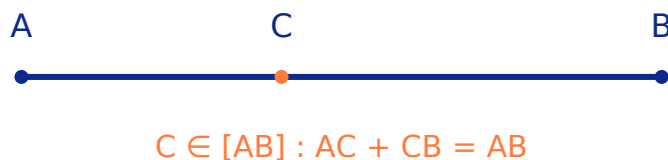
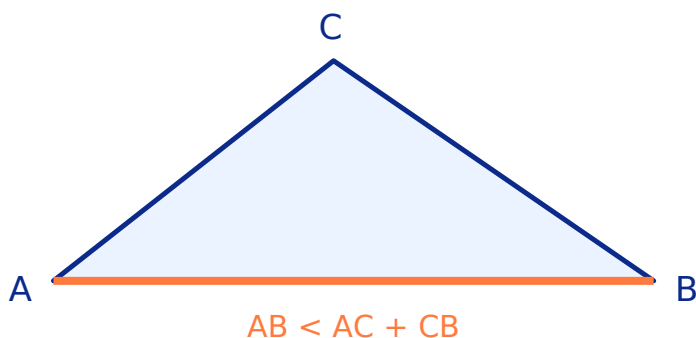
Astuce de Mathbot Pour lire « l'angle $\angle ABC$ », place-toi toujours au sommet qui est écrit **au milieu** : ici B. Les deux autres lettres indiquent les côtés de l'angle.

2. L'inégalité triangulaire

Pour aller du point A au point B, le chemin le plus court est la ligne droite. Passer par un point C est donc un détour, ou, au mieux, un trajet aussi long.

Inégalité triangulaire Pour trois points A, B et C quelconques : $AB \leq AC + CB$.

- Si $AB < AC + CB$, les trois points forment un vrai triangle.
- Si $AB = AC + CB$, le point C est **sur le segment [AB]** : les trois points sont alignés, le triangle est « aplati ».



Méthode : savoir si un triangle est constructible

1. Repère la **plus grande** des trois longueurs.
2. Calcule la **somme des deux autres**.
3. Si la plus grande est **strictement inférieure** à cette somme, le triangle existe.
Sinon, il n'existe pas.

Exemple 1 Peut-on construire un triangle de côtés 7 cm, 9 cm et 15 cm ? Le plus grand côté mesure 15 cm et $7 + 9 = 16$. Comme $15 < 16$, **oui**, le triangle existe.

Exemple 2 Peut-on construire un triangle de côtés 3 cm, 5 cm et 8 cm ? Ici $3 + 5 = 8$: c'est l'égalité. Les points sont alignés, il n'y a **pas de vrai triangle**.

Piège Il ne suffit pas de comparer deux longueurs au hasard ! Il faut comparer la **plus grande** à la somme des deux autres. Si celle-là convient, les deux autres vérifications sont automatiquement bonnes.

3. Construire un triangle

Un triangle est entièrement déterminé quand on connaît **trois informations bien choisies**. Il y a trois cas possibles.

Les trois cas de construction Cas 1 : les longueurs des trois côtés (avec l'inégalité

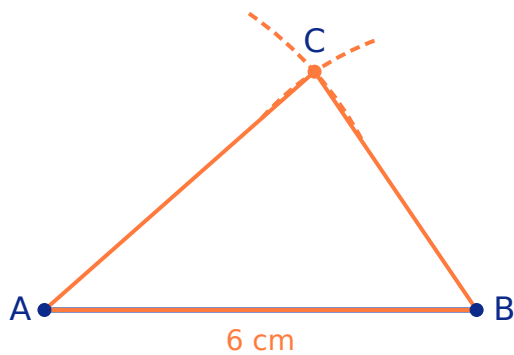
triangulaire vérifiée).

Cas 2 : un angle et les deux côtés qui l'entourent.

Cas 3 : un côté et les deux angles situés à ses extrémités (leur somme doit être inférieure à 180°).

Méthode : les trois côtés sont donnés (règle et compas)

1. Trace le plus long côté, par exemple $[AB] = 6 \text{ cm}$.
2. Pour $AC = 5 \text{ cm}$: place la pointe du compas en A, écartement 5 cm, trace un arc de cercle.
3. Pour $BC = 4 \text{ cm}$: place la pointe du compas en B, écartement 4 cm, trace un second arc.
4. Les deux arcs se coupent en C. Relie C à A et à B.



Méthode : un angle et ses deux côtés / un côté et deux angles

1. Trace le côté connu avec la règle.
2. À une extrémité, place le rapporteur pour tracer l'angle donné.
3. Cas 2 : reporte la longueur du second côté sur la demi-droite tracée, puis termine en reliant les points.
4. Cas 3 : trace l'autre angle à l'autre extrémité. Les deux demi-droites se coupent au troisième sommet.

Exemple Construis le triangle RST tel que $RS = 7 \text{ cm}$, $\angle R = 40^\circ$ et $\angle S = 70^\circ$. On trace $[RS]$, puis un angle de 40° en R et un angle de 70° en S. Les deux demi-droites se coupent en T. Ici $40^\circ + 70^\circ = 110^\circ < 180^\circ$: la construction est possible.

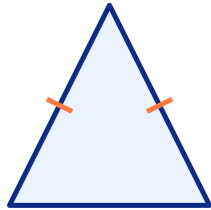
4. Les triangles particuliers

Triangle isocèle Un triangle est **isocèle** quand il a **deux côtés de même longueur**. Le sommet commun à ces deux côtés est le **sommet principal**, le côté opposé est la **base**.

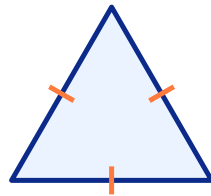
Triangle équilatéral Un triangle est **équilatéral** quand ses **trois côtés** ont la même

longueur.

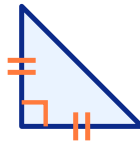
Triangle rectangle Un triangle est **rectangle** quand il a **un angle droit**. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse** : c'est le plus long côté.



isocèle



équilateral



rectangle

Isocèle et angles • Si un triangle est isocèle, alors ses **deux angles à la base** ont la même mesure.

• Réciproquement, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.

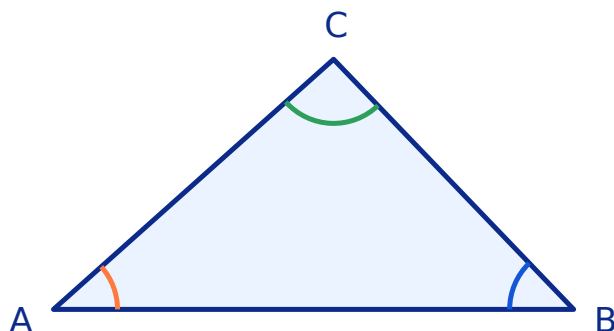
Équilatéral et angles • Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles mesurent **60°**.

• Réciproquement, si un triangle a trois angles de même mesure, alors il est équilatéral.

Piège Un triangle équilatéral est **aussi** isocèle (il a bien deux côtés égaux, et même trois). Un triangle peut aussi être **à la fois rectangle et isocèle** : on le reconnaît à son angle droit et à ses deux autres angles de 45°.

5. La somme des angles d'un triangle

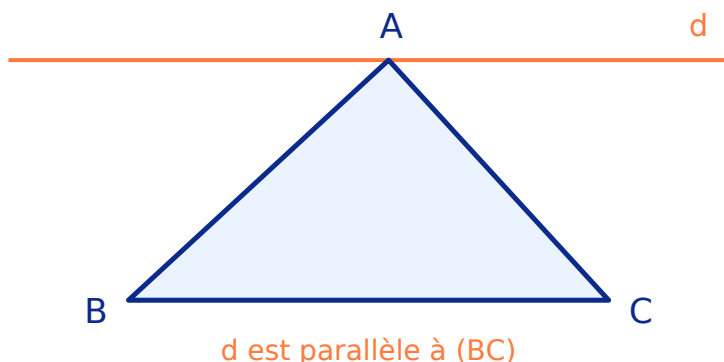
Somme des angles Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à **180°**.



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Pourquoi est-ce vrai ? Trace la droite (d) parallèle à (BC) passant par A. Les angles

formés par (d) et les côtés [AB] et [AC] sont **alternes-internes** avec les angles B et C : ils ont donc les mêmes mesures. Avec l'angle A, on obtient trois angles qui forment ensemble un angle plat, soit 180° .



Méthode : calculer un angle manquant

1. Écris que la somme des trois angles vaut 180° .
2. Additionne les deux angles connus.
3. Soustrais ce total à 180° .

Exemple 1 Dans le triangle ABC, $\angle A = 52^\circ$ et $\angle B = 77^\circ$. Comme la somme des angles est 180° , $\angle C = 180^\circ - (52^\circ + 77^\circ) = 180^\circ - 129^\circ = \mathbf{51^\circ}$.

Exemple 2 : triangle isocèle Un triangle isocèle a un angle au sommet principal de 36° . Les deux angles à la base sont égaux et valent chacun $(180^\circ - 36^\circ) \div 2 = 144^\circ \div 2 = \mathbf{72^\circ}$.

Conséquences • Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont une somme de 90° .

- Un triangle rectangle isocèle a deux angles de 45° .
- Un triangle ne peut avoir qu'**un seul** angle droit ou obtus.

6. Médiatrices et cercle circonscrit

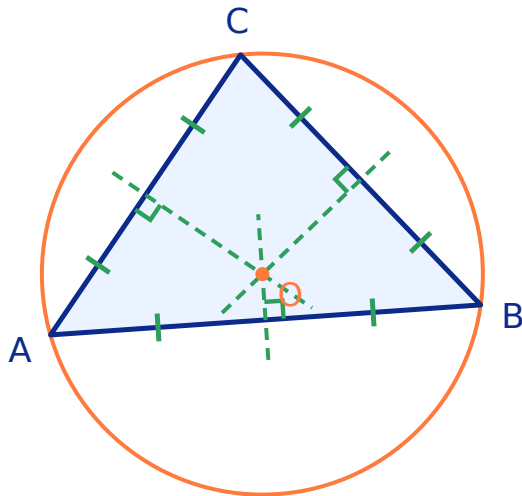
Médiatrice d'un segment La **médiatrice** d'un segment est la droite qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son **milieu**.

Propriété de la médiatrice Un point est sur la médiatrice d'un segment [AB] si, et seulement si, il est à **égale distance** de A et de B : $MA = MB$.

Médiatrices d'un triangle Les **médiatrices d'un triangle** sont les médiatrices de ses trois côtés.

Cercle circonscrit Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en **un seul point O**.

Ce point est à égale distance des trois sommets : c'est le centre du **cercle circonscrit**, l'unique cercle qui passe par A, B et C.

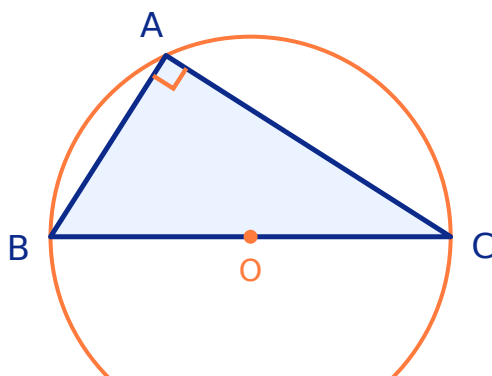


Méthode : tracer le cercle circonscrit

1. Trace la médiatrice de [AB] (au compas ou avec l'équerre et le milieu).
2. Trace la médiatrice de [BC]. Elles se coupent en O.
3. Place la pointe du compas en O, écartement OA, et trace le cercle : il passe par A, B et C.

(La troisième médiatrice sert de vérification.)

Cas du triangle rectangle Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le **milieu de l'hypoténuse**. Le cercle a donc l'hypoténuse pour diamètre.



Exemple ABC est rectangle en A avec $BC = 9$ cm. Son cercle circonscrit a pour centre le milieu O de [BC] et pour rayon $9 \div 2 = 4,5$ cm. On a donc $OA = OB = OC = 4,5$ cm.

7. Les hauteurs d'un triangle

Hauteur Dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet et qui est **perpendiculaire au côté opposé** (ou à son prolongement). On parle de la hauteur

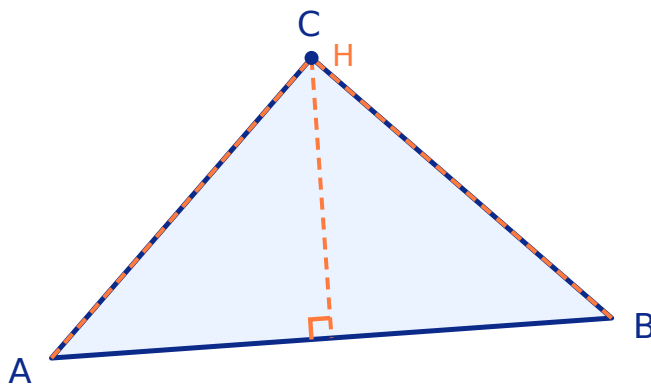
Fiche en ligne : maths-facile.eu/triangles-cours-5eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur maths-facile.eu ·

issue de A ou **relative au côté [BC]**. Le pied de la hauteur est le point où elle coupe ce côté.

Méthode : tracer une hauteur

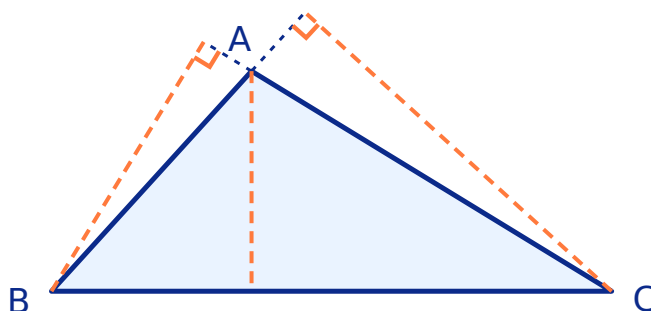
1. Choisis le sommet de départ, par exemple A.
2. Place l'équerre avec un côté de l'angle droit le long de [BC].
3. Fais glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit passe par A.
4. Trace la droite : c'est la hauteur issue de A.

Orthocentre Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en **un seul point**, appelé **orthocentre**.



Cas particuliers • Si le triangle a un **angle obtus** (plus de 90°), deux hauteurs sont à **l'extérieur** du triangle : il faut prolonger le côté opposé pour y poser l'équerre.

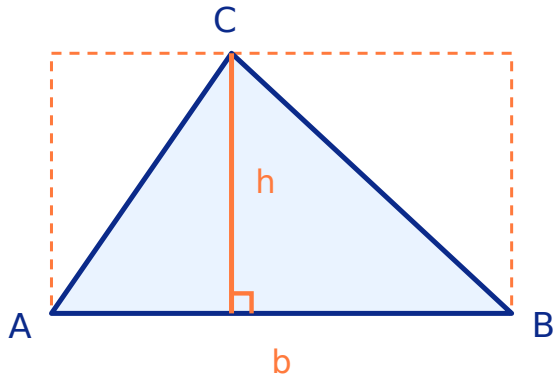
• Si le triangle est **rectangle**, deux de ses hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.



8. L'aire d'un triangle

Aire d'un triangle L'aire d'un triangle est la **moitié** du produit d'un côté (la **base** b) par la **hauteur** h qui lui est relative :

$$\text{Aire} = b \times h \div 2$$



Le triangle occupe la moitié du rectangle de même base et de même hauteur.

- La base et la hauteur doivent être **perpendiculaires** et exprimées dans la **même unité** ; l'aire est alors en unité².
- On peut choisir **n'importe quel côté** comme base, à condition de prendre la hauteur qui lui correspond : on trouve toujours la même aire.

Exemple 1 : calcul de l'aire Un triangle a une base de 9 cm et une hauteur relative de 4 cm. Son aire est $9 \times 4 \div 2 = 36 \div 2 = \mathbf{18 \text{ cm}^2}$.

Exemple 2 : calcul de la hauteur Un triangle a pour aire 30 cm² et une base de 12 cm. On a $12 \times h \div 2 = 30$, donc $12 \times h = 60$ et $h = 60 \div 12 = \mathbf{5 \text{ cm}}$.

Piège N'utilise jamais un côté « penché » à la place de la hauteur : dans un triangle quelconque, la hauteur n'est pas un côté. Et n'oublie pas de diviser par 2 !

À retenir

- Inégalité triangulaire : $AB \leq AC + CB$; le triangle existe si le plus grand côté est strictement inférieur à la somme des deux autres.
- On construit un triangle avec trois côtés, ou un angle et deux côtés, ou un côté et deux angles.
- Isocèle : deux côtés égaux et deux angles à la base égaux. Équilatéral : trois côtés égaux et trois angles de 60°. Rectangle : un angle droit.
- La somme des angles d'un triangle vaut 180°.
- La médiatrice d'un segment est perpendiculaire au segment en son milieu ; ses points sont équidistants des extrémités.
- Les trois médiatrices se coupent au centre du cercle circonscrit ; dans un triangle rectangle, c'est le milieu de l'hypoténuse.
- Une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé ; les trois hauteurs se coupent en l'orthocentre.
- Aire d'un triangle = base $\times$ hauteur $\div$ 2.