

# Triangles et proportionnalité

## Cours de maths - 4ème

Une photo agrandie, un plan, une maquette : ce sont des figures qui gardent **la même forme** mais pas la même taille. Dans ce chapitre, tu apprends à **agrandir et réduire** une figure avec un coefficient, à reconnaître des **triangles de même forme** et à utiliser la proportionnalité pour **calculer des longueurs** que l'on ne peut pas mesurer directement.

## 1. Rappels : proportionnalité et parallèles

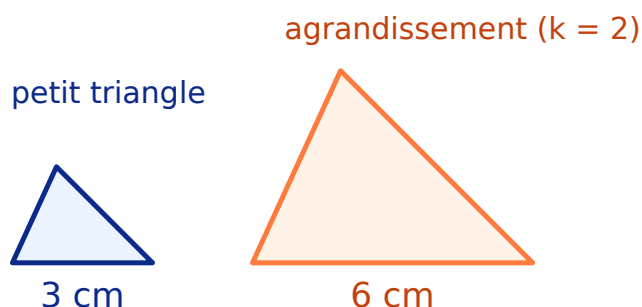
**Ce que tu dois déjà savoir** Deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre (le coefficient). Pour trouver une valeur manquante, on utilise l'égalité des quotients ou le **produit en croix** : si  $a/b = c/d$ , alors  $a \times d = b \times c$ .

**Exemple** Si  $3/x = 12/20$ , alors  $12 \times x = 3 \times 20 = 60$ , donc  $x = 60 \div 12 = 5$ .

Rappelle-toi aussi trois faits de géométrie qui serviront souvent : la somme des angles d'un triangle vaut **180°** ; deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux et des angles alternes-internes égaux ; un point  $M$  de  $[AB]$  vérifie  $AB = AM + MB$ .

## 2. Agrandir et réduire une figure

**Agrandissement et réduction** Une figure est un **agrandissement** ou une **réduction** d'une autre quand elle a **la même forme** et que toutes ses longueurs sont obtenues en multipliant les longueurs de la première par un même nombre positif  $k$ , appelé **coefficient** (ou rapport). Si  $k > 1$ , c'est un agrandissement ; si  $0 < k < 1$ , c'est une réduction ; si  $k = 1$ , les figures ont la même taille.



Le petit triangle a un côté de 3 cm. Dans l'agrandissement de coefficient 2, le côté correspondant mesure 6 cm.

Fiche en ligne : [maths-facile.eu/triangles-et-proportionnalite-cours-4eme/](https://maths-facile.eu/triangles-et-proportionnalite-cours-4eme/) · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

Les trois côtés sont doublés, la forme est la même.

**Ce qui change, ce qui ne change pas** Quand on agrandit ou réduit une figure de coefficient  $k$  : les **longueurs** sont multipliées par  $k$  ; les **angles** ne changent pas ; les droites parallèles restent parallèles ; les droites perpendiculaires restent perpendiculaires.

**Trouver le coefficient** On divise une longueur de la nouvelle figure par la longueur correspondante de la figure de départ :  $k = \text{longueur nouvelle} \div \text{longueur de départ}$ .  
Exemple : un côté passe de 8 cm à 12 cm, donc  $k = 12/8 = 1,5$  (agrandissement). Un côté passe de 20 cm à 5 cm :  $k = 5/20 = 0,25$  (réduction).

**Piège classique** Agrandir, ce n'est pas *ajouter* le même nombre à chaque côté, c'est les *multiplier*. Un rectangle de 4 cm sur 6 cm auquel on ajoute 2 cm à chaque côté (6 cm sur 8 cm) n'est pas un agrandissement :  $6 \div 4 = 1,5$  mais  $8 \div 6 \approx 1,33$ .

L'échelle d'un plan ou d'une maquette est un coefficient de réduction. Une échelle de 1/200 signifie que 1 cm sur le plan représente 200 cm, soit 2 m, dans la réalité :  $k = 1/200$ .

### 3. Reconnaître deux figures de même forme

**Vérifier avec un tableau de proportionnalité** On range dans un tableau les longueurs de la première figure et les longueurs correspondantes de la seconde, puis on calcule chaque quotient. Si tous les quotients sont égaux, les longueurs sont proportionnelles.

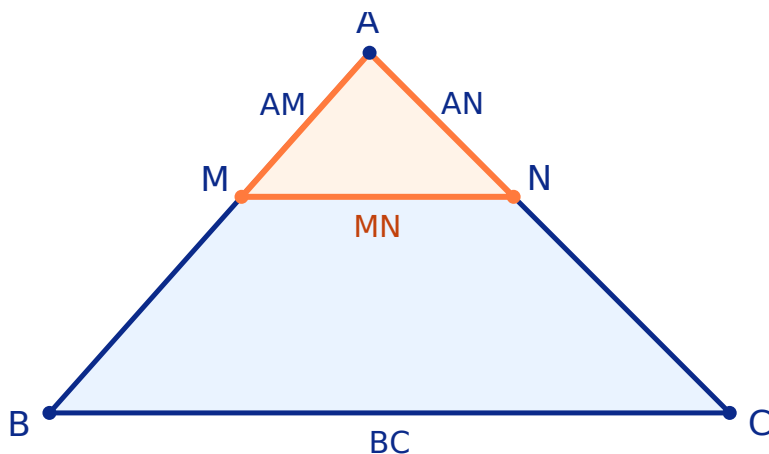
| Côté       | Triangle 1 | Triangle 2 | Quotient          |
|------------|------------|------------|-------------------|
| petit côté | 4 cm       | 6 cm       | $6 \div 4 = 1,5$  |
| côté moyen | 6 cm       | 9 cm       | $9 \div 6 = 1,5$  |
| grand côté | 8 cm       | 12 cm      | $12 \div 8 = 1,5$ |

Les trois quotients sont égaux à 1,5 : le triangle 2 est un agrandissement du triangle 1 de coefficient 1,5.

**Un seul quotient différent suffit à conclure** Si, avec 4 cm ; 6 cm ; 8 cm d'un côté et 6 cm ; 9 cm ; 13 cm de l'autre, tu trouves 1,5 ; 1,5 et 1,625, les quotients ne sont pas tous égaux : les triangles ne sont pas de même forme.

### 4. Deux triangles emboîtés

Voici une situation très fréquente. Dans un triangle ABC, on place un point  $M$  sur le côté [AB] et un point  $N$  sur le côté [AC], de sorte que la droite (MN) soit **parallèle** à (BC). Le petit triangle AMN est « emboîté » dans le grand triangle ABC.



Le petit triangle AMN (en orange) a le même angle en A que ABC. Comme  $(MN) \parallel (BC)$ , les angles en M et en B sont égaux (angles correspondants), de même en N et en C.

**Propriété (admise)** Si M est sur [AB], N est sur [AC] et si  $(MN)$  est parallèle à  $(BC)$ , alors AMN est une **réduction** de ABC, de sommet commun A. Les longueurs sont proportionnelles :

$$\mathbf{AM/AB = AN/AC = MN/BC = k.}$$

Le nombre  $k$  est le coefficient de réduction. Tu retrouveras cette idée en 3ème, où elle sera démontrée et étendue à d'autres figures ; pour l'instant, nous l'utilisons pour calculer.

**Attention à l'ordre des sommets** Les quotients comparent un côté du **petit** triangle à son côté correspondant dans le **grand**. Le point commun A est toujours au début : AM sur AB, AN sur AC. Ne mélange pas AM avec MB : MB est un morceau du côté, pas le côté entier.

## 5. Calculer une longueur dans deux triangles emboîtés

**Méthode en quatre étapes** 1) Justifie que  $(MN)$  est parallèle à  $(BC)$  et que M, N sont sur [AB] et [AC]. 2) Écris les quotients égaux avec les lettres. 3) Remplace par les valeurs connues. 4) Calcule la longueur cherchée avec le produit en croix (ou avec le coefficient  $k$ ), puis conclus avec l'unité.

**Exemple résolu**  $(MN) \parallel (BC)$ ,  $M \in [AB]$ ,  $N \in [AC]$ . On donne  $AM = 4$  cm,  $AB = 10$  cm,  $AN = 5,2$  cm et  $BC = 12,5$  cm.

AMN est une réduction de ABC, donc  $\mathbf{AM/AB = AN/AC = MN/BC}$ , soit  $\mathbf{4/10 = 5,2/AC = MN/12,5}$ .

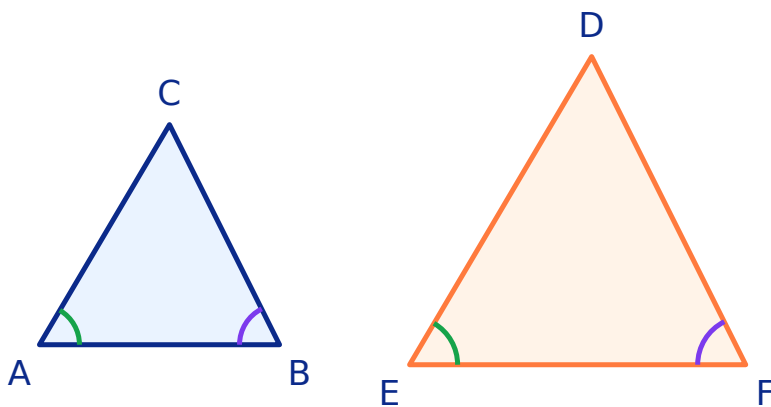
$k = \mathbf{4/10} = 0,4$ . Alors  $MN = 0,4 \times 12,5 = \mathbf{5}$  cm. Et  $AC = 5,2 \div 0,4 = \mathbf{13}$  cm.

**Quand on donne MB au lieu de AB** Le côté entier se calcule par addition :  $AB = AM + MB$ . Si  $AM = 3$  cm et  $MB = 5$  cm, alors  $AB = 8$  cm et  $k = \mathbf{3/8}$ . De même,  $NC = AC - AN$ .

**Le coach Mathbot** Avant de calculer, regarde ta figure : si tu cherches la longueur d'un côté du grand triangle, le résultat doit être *plus grand* que le côté correspondant du petit ! C'est un bon réflexe pour repérer une inversion.

## 6. Triangles semblables

**Triangles semblables** Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont la même forme, c'est-à-dire lorsque l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre (éventuellement après l'avoir déplacé ou retourné). Leurs **angles** sont égaux deux à deux et leurs **côtés** sont proportionnels. Les sommets, les angles et les côtés qui se correspondent sont dits **homologues**.



Les angles marqués de la même couleur sont égaux. Le côté [AB], qui joint les angles vert et violet, correspond à [EF].

**Deux propriétés admises** • Si deux triangles ont leurs angles égaux deux à deux, alors ils sont semblables et leurs côtés homologues sont proportionnels.  
• Si deux triangles ont leurs trois côtés proportionnels, alors ils sont semblables (leurs angles sont égaux deux à deux).

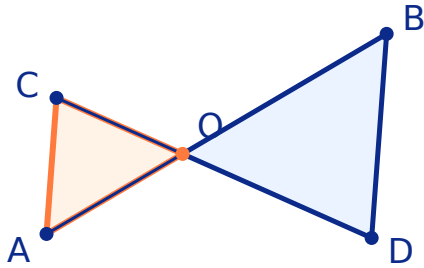
**Deux angles suffisent** La somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  : si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles de l'autre, le troisième l'est aussi. Exemple : un triangle a des angles de  $50^\circ$  et  $60^\circ$ , donc le troisième vaut  $180 - 50 - 60 = 70^\circ$ . Un autre a des angles de  $60^\circ$  et  $70^\circ$  : il est semblable au premier.

**Calculer une longueur dans deux triangles semblables** 1) Repère les angles égaux et écris la correspondance des sommets. 2) Repère deux côtés homologues dont on connaît les longueurs : leur quotient donne le coefficient  $k$ . 3) Multiplie (ou divise) par  $k$  pour trouver la longueur cherchée.

**Exemple** Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux :  $A = E$ ,  $B = F$ ,  $C = D$ . On donne  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm et  $EF = 7,5$  cm. Les côtés [AB] et [EF] sont homologues :  $k = 7,5/5 = 1,5$ . Donc FD, homologue de BC, vaut  $1,5 \times 7 = 10,5$  cm.

## 7. La configuration « en papillon »

Deux triangles peuvent aussi se toucher par un sommet, de part et d'autre de ce sommet. Les droites (AB) et (CD) se coupent en O, avec O entre A et B et entre C et D, et les droites (AC) et (BD) sont parallèles.



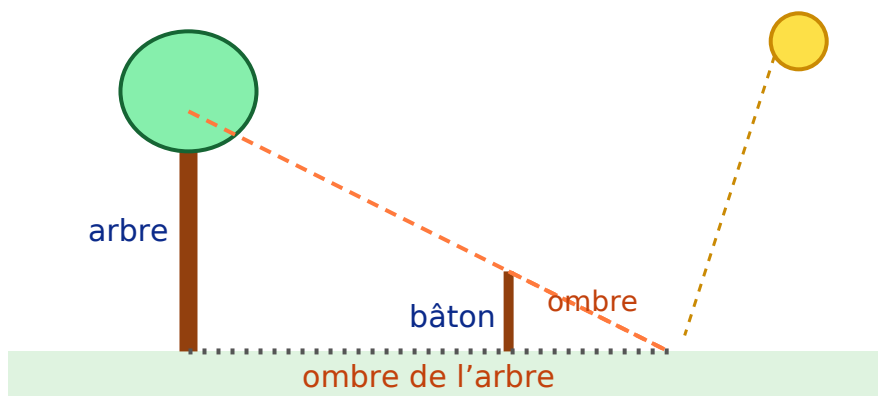
Les triangles OAC (orange) et OBD forment un « papillon ». Les angles en O sont égaux (opposés par le sommet) ; les angles en A et en B, comme en C et en D, sont égaux (alternes-internes, car (AC) // (BD)).

**Propriété** Dans une configuration en papillon avec (AC) // (BD), les triangles OAC et OBD ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont **semblables**, et  $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$ .

**Sens du coefficient** Selon que tu pars de OAC ou de OBD, le coefficient est  $k$  ou son inverse  $1/k$ . Ici, OBD est le plus grand : pour passer de OAC à OBD, on multiplie par  $\frac{OB}{OA} > 1$ .

## 8. Applications : longueurs inaccessibles

La proportionnalité des triangles permet de mesurer ce qu'on ne peut pas atteindre : la hauteur d'un arbre, la largeur d'une rivière, la hauteur d'un monument. Le soleil est si éloigné que ses rayons sont considérés comme **parallèles**.



Au même moment, l'arbre et le bâton, tous deux verticaux, projettent leurs ombres. Les deux triangles « objet – ombre – rayon » ont les mêmes angles : ils sont semblables.

Fiche en ligne : [maths-facile.eu/triangles-et-proportionnalite-cours-4eme/](https://maths-facile.eu/triangles-et-proportionnalite-cours-4eme/) · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

**Hauteur d'un arbre** Un bâton vertical de 1,5 m a une ombre de 2 m. Au même moment, l'ombre de l'arbre mesure 14 m. Le coefficient est  $k = 14 \div 2 = 7$ . La hauteur de l'arbre est donc  $1,5 \times 7 = \mathbf{10,5\ m}$ .

**Rédiger une solution** 1) Nomme les deux triangles et justifie leur forme (parallèles, angles égaux, ombres au même moment). 2) Écris la correspondance des côtés. 3) Calcule le coefficient. 4) Calcule la longueur et écris une phrase réponse avec l'unité.

## À retenir

- Aggrandir ou réduire une figure de coefficient  $k$ , c'est multiplier toutes ses longueurs par  $k$  ; les angles ne changent pas.  $k > 1$  : aggrandissement ;  $k < 1$  : réduction.
- Le coefficient se calcule en divisant une longueur nouvelle par la longueur correspondante de départ.
- Aggrandir, c'est multiplier, jamais ajouter le même nombre à chaque côté.
- Si  $M \in [AB]$ ,  $N \in [AC]$  et  $(MN) \parallel (BC)$ , alors  **$AM/AB = AN/AC = MN/BC$**  (propriété admise).
- Deux triangles dont les angles sont égaux deux à deux sont semblables : leurs côtés homologues sont proportionnels.
- Avec deux angles égaux, le troisième l'est aussi (somme  $180^\circ$ ).
- En papillon avec  $(AC) \parallel (BD)$  :  **$OB/OA = OD/OC = BD/AC$** .
- Pour une longueur inaccessible, on repère deux triangles semblables, on calcule  $k$ , puis on conclut avec une phrase et l'unité.