

Trigonométrie

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Degrés vers radians ★★★

On multiplie par $\pi/180$ puis on simplifie.

- a. $30 \times \pi/180 = \pi/6$
- b. $45 \times \pi/180 = \pi/4$
- c. $120 \times \pi/180 = 2\pi/3$
- d. $150 \times \pi/180 = 5\pi/6$
- e. $270 \times \pi/180 = 3\pi/2$
- f. $15 \times \pi/180 = \pi/12$

2 Radians vers degrés ★★★

On remplace π par 180° .

- a. $\pi/5 \text{ rad} = 180^\circ \div 5 = 36^\circ$
- b. $3\pi/4 \text{ rad} = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$
- c. $7\pi/6 \text{ rad} = 7 \times 30^\circ = 210^\circ$
- d. $5\pi/3 \text{ rad} = 5 \times 60^\circ = 300^\circ$
- e. $2\pi/9 \text{ rad} = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$
- f. $11\pi/12 \text{ rad} = 11 \times 15^\circ = 165^\circ$

3 Arcs et secteurs ★★★

- a. $\ell = r\alpha = 6 \times \pi/3 = 2\pi \approx 6,28 \text{ cm.}$
- b. $\ell = 4 \times 1,5 = 6 \text{ cm.}$
- c. $\alpha = \ell \div r = 9 \div 5 = 1,8 \text{ rad. En degrés : } 1,8 \times 180/\pi \approx 103,1^\circ.$
- d. $\square = 1/2 \times 6^2 \times \pi/3 = 6\pi \approx 18,85 \text{ cm}^2.$

4 Mesures principales ★★★

On ajoute ou retranche des multiples de 2π .

- a. $7\pi/3 - 2\pi = \pi/3$

- b. $-11\pi/4 + 2\pi = -3\pi/4$, qui est dans $]-\pi ; \pi]$
- c. $13\pi/6 - 2\pi = \pi/6$
- d. $25\pi/4 - 6\pi = \pi/4$ (car $6\pi = 24\pi/4$)
- e. $-5\pi + 6\pi = \pi$
- f. $17\pi/3 - 6\pi = -\pi/3$ (car $6\pi = 18\pi/3$)

5 Valeurs remarquables ★★★

- a. $1/2$
- b. $\sqrt{2}/2$
- c. $\sqrt{3}/2$
- d. 1
- e. -1
- f. 0
- g. $1/2$
- h. 0

Ces valeurs se lisent dans le tableau du cours ou directement sur le cercle ($\cos \pi$: abscisse du point $(-1 ; 0)$).

6 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** Un cosinus est une abscisse d'un point du cercle de rayon 1 : il est toujours compris entre -1 et 1.
- b. **Vrai.** C'est le théorème de Pythagore dans le triangle OHM.
- c. **Faux.** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie d'axe (OJ)). Contre-exemple : $x = \pi/3$ donne $\cos 2\pi/3 = -1/2 \neq 1/2$.
- d. **Vrai.** $M(x + 2\pi) = M(x)$.
- e. **Faux.** Le cosinus est pair : $\cos(-x) = \cos x$.
- f. **Faux.** $5\pi/6$ convient aussi (et tous les réels $x + 2k\pi$). La seule valeur $\pi/6$ n'est pas la bonne réponse générale.

7 Sinus ou cosinus déduit ★★★

On utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ puis le signe.

- a. $\sin^2 x = 1 - 9/25 = 16/25$. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$ (M est dans le demi-plan supérieur). Donc $\sin x = 4/5$.
- b. $\cos^2 x = 1 - 25/169 = 144/169$. Sur $]-\pi/2 ; 0[$, M est dans le quart de plan en bas à droite : $\cos x > 0$. Donc $\cos x = 12/13$.
- c. $\sin^2 x = 1 - 5/9 = 4/9$. Comme $\sin x > 0$, $\sin x = 2/3$.

8 Angles associés : calculs ★★★

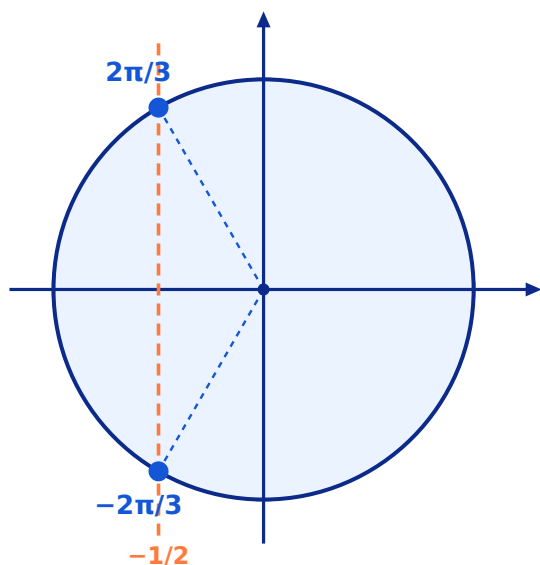
- a. $\cos(\pi - \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$
- b. $\sin(\pi + \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$
- c. $\cos$ est paire : $\cos(-\pi/3) = \cos \pi/3 = 1/2$
- d. $\sin(\pi - \pi/3) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$
- e. $\cos(\pi + \pi/4) = -\cos \pi/4 = -\sqrt{2}/2$
- f. $\sin$ est impaire : $\sin(-3\pi/4) = -\sin 3\pi/4 = -\sin(\pi - \pi/4) = -\sqrt{2}/2$
- g. $\cos(2\pi - \pi/6) = \cos(-\pi/6) = \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$
- h. $\sin(\pi + \pi/3) = -\sin \pi/3 = -\sqrt{3}/2$

9 Simplifier des expressions ★★★

- a. $A = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x.$
- b. $B = -\sin x - \sin x - \sin x = -3 \sin x.$
- c. $D = -\sin x + \sin x = 0.$
- d. $E = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

10 Équations de base ★★★

- a. $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ donc $x = \pm \pi/6$. $S = \{-\pi/6 ; \pi/6\}.$
- b. $\cos 2\pi/3 = -1/2$ donc $x = \pm 2\pi/3$. $S = \{-2\pi/3 ; 2\pi/3\}.$
- c. $\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$; l'autre solution est $\pi - (-\pi/4) = 5\pi/4$, soit $-3\pi/4$ une fois ramenée dans l'intervalle. $S = \{-3\pi/4 ; -\pi/4\}.$
- d. $\sin \pi/6 = 1/2$: $x = \pi/6$ ou $x = 5\pi/6$. $S = \{\pi/6 ; 5\pi/6\}.$
- e. $\cos x = 0$: $S = \{\pi/2 ; 3\pi/2\}.$



11 Équations à ramener ★★★

- a. $\cos x = 1/2$ donc $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $x = \pi/3$ ou $x = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$.
- b. $\sin x = -\sqrt{3}/2$. Les angles $4\pi/3$ et $5\pi/3$ conviennent ($\sin(\pi + \pi/3) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$). $S = \{4\pi/3 ; 5\pi/3\}$.
- c. $\cos x = -\sqrt{2}/2 = \cos 3\pi/4$, donc $x = \pm 3\pi/4 + 2k\pi$, soit $3\pi/4$ ou $5\pi/4$ dans $[0 ; 2\pi[$. $S = \{3\pi/4 ; 5\pi/4\}$.
- d. Un sinus est toujours dans $[-1 ; 1]$: l'équation n'a **aucune solution**. $S = \emptyset$.

12 Parité ★★★

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On calcule chaque fois l'image de $-x$.

- a. $f(-x) = (-x)(-\sin x) = x \sin x = f(x)$: **paire**.
- b. $g(-x) = -\sin x - x = -g(x)$: **impaire**.
- c. $h(-x) = (-\sin x) \cos x = -h(x)$: **impaire**.
- d. $k(\pi/2) = 2$ et $k(-\pi/2) = 0$. Comme $0 \neq 2$, k n'est pas paire ; comme $0 \neq -2$, elle n'est pas impaire. **Ni l'un ni l'autre**.
- e. $m(-x) = \cos x + x^2 = m(x)$: **paire**.

13 Périodicité pour calculer ★★★

- a. $25\pi/3 - 8\pi = \pi/3$ ($8\pi = 24\pi/3$), donc $\cos = 1/2$.
- b. $-19\pi/6 + 4\pi = 5\pi/6$ ($4\pi = 24\pi/6$), donc $\sin = \sin(\pi - \pi/6) = 1/2$.
- c. 2027 est impair : $2027\pi = 1013 \times 2\pi + \pi$, donc $\cos(2027\pi) = \cos \pi = -1$.
- d. $41\pi/4 - 10\pi = \pi/4$ ($10\pi = 40\pi/4$), donc $\sin = \sqrt{2}/2$.
- e. $-33\pi/2 + 16\pi = -\pi/2$ ($16\pi = 32\pi/2$), donc $\cos = 0$.

14 Une roue de vélo ★★★

- a. La distance parcourue est la longueur d'arc : $\ell = r\alpha = 33 \times 7\pi/4 = 231\pi/4 \approx 181,4$ cm.
- b. Un tour fait $2\pi \times 33 \approx 207,3$ cm. Et $100 \text{ m} = 10\,000$ cm. Nombre de tours : $10\,000 \div (2\pi \times 33) \approx 48,2$. **La roue fait environ 48,2 tours.**

15 Lecture graphique ★★★

- a. La courbe coupe la droite en quatre points, d'abscisses $-5\pi/3, -\pi/3, \pi/3, 5\pi/3$.
- b. $\cos \pi/3 = 1/2$ donc $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Pour $k = 0$: $\pm\pi/3$. Pour $k = 1$: $7\pi/3 > 2\pi$ (hors intervalle) et $-\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3$. Pour $k = -1$: $-5\pi/3$ (car $\pi/3 - 2\pi$) et $-7\pi/3 < -2\pi$. Les quatre solutions sont bien $\pm\pi/3$ et $\pm 5\pi/3$.
- c. La courbe est au-dessus (ou sur) la droite pour $x \in [-2\pi ; -5\pi/3] \cup [-\pi/3 ; \pi/3] \cup [5\pi/3 ; 2\pi]$.

16 Un triangle équilatéral dans le cercle ★★★

- a. $M(\cos \pi/2 ; \sin \pi/2) = (0 ; 1)$. $N(\cos 7\pi/6 ; \sin 7\pi/6) = (-\sqrt{3}/2 ; -1/2)$. $P(\cos 11\pi/6 ; \sin 11\pi/6) = (\sqrt{3}/2 ; -1/2)$.
- b. $MN^2 = (-\sqrt{3}/2 - 0)^2 + (-1/2 - 1)^2 = 3/4 + 9/4 = 3$. $NP^2 = (\sqrt{3})^2 + 0^2 = 3$. $MP^2 = (\sqrt{3}/2)^2 + (-3/2)^2 = 3/4 + 9/4 = 3$. Les trois côtés mesurent $\sqrt{3}$: **le triangle MNP est équilatéral**.
- c. Aire d'un triangle équilatéral de côté c : $\sqrt{3}/4 c^2$. Ici : $\sqrt{3}/4 \times 3 = 3\sqrt{3}/4 \approx 1,30$ unité d'aire.

17 L'hexagone régulier ★★★

- a. $A_0(1 ; 0)$, $A_1(1/2 ; \sqrt{3}/2)$, $A_2(-1/2 ; \sqrt{3}/2)$, $A_3(-1 ; 0)$, $A_4(-1/2 ; -\sqrt{3}/2)$, $A_5(1/2 ; -\sqrt{3}/2)$.
- b. $A_0A_1^2 = (1 - 1/2)^2 + (0 - \sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$, donc $A_0A_1 = 1$. Par symétrie, les six côtés mesurent 1 : périmètre = 6.
- c. La circonférence est $2\pi \approx 6,28 > 6$. C'est cohérent : un polygone inscrit dans un cercle est plus court que ce cercle.
- d. L'hexagone se découpe en six triangles équilatéraux de côté 1, d'aire $\sqrt{3}/4$ chacun. Aire = $6 \times \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,60$.

18 Équations qui se ramènent à des équations de base ★★★

- a. L'équation équivaut à $\cos^2 x = 1/2$, soit $\cos x = \sqrt{2}/2$ ou $\cos x = -\sqrt{2}/2$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $\pi/4$ et $7\pi/4$ pour le premier cas ; $3\pi/4$ et $5\pi/4$ pour le second. $S = \{\pi/4 ; 3\pi/4 ; 5\pi/4 ; 7\pi/4\}$.
- b. On pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = (1 - 3) \div 4 = -1/2$ ou $X = (1 + 3) \div 4 = 1$. Pour $\sin x = 1$: $x = \pi/2$. Pour $\sin x = -1/2$: $x = 7\pi/6$ ou $x = 11\pi/6$. $S = \{\pi/2 ; 7\pi/6 ; 11\pi/6\}$.

19 Équations avec deux angles ★★★

- a. $x = \pm\pi/5 + 2k\pi$; dans $]-\pi ; \pi]$: $S = \{-\pi/5 ; \pi/5\}$.
- b. $x = 2\pi/7 + 2k\pi$ ou $x = \pi - 2\pi/7 + 2k\pi = 5\pi/7 + 2k\pi$. $S = \{2\pi/7 ; 5\pi/7\}$.
- c. $\cos x = \cos(\pi/2 - x) \Leftrightarrow x = \pi/2 - x + 2k\pi$ ou $x = -\pi/2 + x + 2k\pi$. La seconde égalité donne $0 = -\pi/2 + 2k\pi$, impossible pour k entier. La première donne $2x = \pi/2 + 2k\pi$, soit $x = \pi/4 + k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $S = \{\pi/4 ; 5\pi/4\}$. Vérification : $\sin 5\pi/4 = \cos 5\pi/4 = -\sqrt{2}/2$.

20 Inéquations ★★★

- a. $\cos x = 1/2$ pour $x = \pm\pi/3$. Les points du cercle d'abscisse supérieure à $1/2$ forment l'arc centré en I. $S = [-\pi/3 ; \pi/3]$.

- b. $\sin x = -\sqrt{2}/2$ pour $x = -\pi/4$ et $x = -3\pi/4$. Les points d'ordonnée strictement inférieure à $-\sqrt{2}/2$ forment l'arc du bas, bornes exclues. $S =]-3\pi/4 ; -\pi/4[$.
- c. $\cos x = -\sqrt{3}/2$ pour $x = 5\pi/6$ et $x = 7\pi/6$. Les points d'abscisse inférieure ou égale à $-\sqrt{3}/2$ forment l'arc centré en $(-1 ; 0)$. $S = [5\pi/6 ; 7\pi/6]$.

21 Étude d'une fonction ★★★

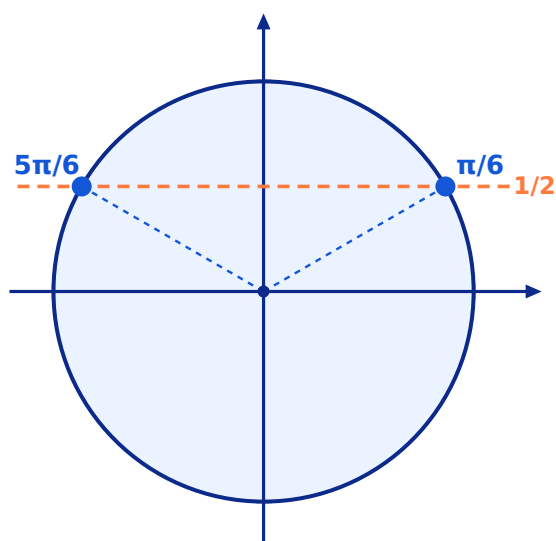
- a. $f(0) = 2 - 1 = 1$; $f(\pi/3) = 2 \times 1/2 - 1 = 0$; $f(\pi/2) = -1$; $f(\pi) = -2 - 1 = -3$.
- b. $f(-x) = 2\cos(-x) - 1 = 2\cos x - 1 = f(x)$: paire. $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) - 1 = f(x)$.
- c. Le cosinus décroît sur $[0 ; \pi]$ donc $2\cos x - 1$ aussi (on multiplie par $2 > 0$ puis on retranche 1).

x	0	$\pi/3$	π
$f(x)$	1	$\searrow 0$	$\searrow -3$

- d. Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $-3 \leq f(x) \leq 1$. Le maximum est 1 (atteint pour $x = 2k\pi$) et le minimum est -3 (atteint pour $x = \pi + 2k\pi$).
- e. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3$ sur $[-\pi ; \pi]$. $f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 1/2 \Leftrightarrow x \in]-\pi/3 ; \pi/3[$.

22 La grande roue ★★★

- a. $H(0) = 22$ m ; $H(\pi/2) = 22 + 20 = 42$ m ; $H(7\pi/6) = 22 + 20 \times (-1/2) = 12$ m.
- b. Le minimum de $\sin \theta$ est -1 , donc $H \geq 22 - 20 = 2$ m. Il est atteint pour $\theta = 3\pi/2$ (la nacelle est alors tout en bas).
- c. $H(\theta) = 32 \Leftrightarrow 20 \sin \theta = 10 \Leftrightarrow \sin \theta = 1/2 \Leftrightarrow \theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$.
- d. $H(\theta) > 32 \Leftrightarrow \sin \theta > 1/2 \Leftrightarrow \theta \in]\pi/6 ; 5\pi/6[$. L'arc a pour amplitude $5\pi/6 - \pi/6 = 2\pi/3$ rad, soit $2\pi/3 \div 2\pi = 1/3$ de tour. Durée : $1/3 \times 9 = 3$ minutes.



23 Identités à démontrer ★★★

- a. $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$, car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- b. On développe : $(\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) + (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$.
- c. D'après a., $\frac{1}{4} = 1 + 2 \sin x \cos x$, donc $2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, d'où $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$.