

Trigonométrie

Cours de maths - 1ère

Une roue qui tourne, l'aiguille d'une horloge, la houle de la mer, le courant alternatif de ta prise électrique : tous ces phénomènes se répètent à l'identique, encore et encore. Pour les décrire, on a besoin d'un outil qui mesure des angles et qui « tourne en rond » : la **trigonométrie**. Dans ce chapitre, tu apprends une nouvelle unité d'angle, le **radian**, puis tu définis le **cosinus** et le **sinus** d'un nombre réel avec le cercle trigonométrique, tu résous des équations, et tu découvres les deux fonctions « ondulantes » les plus célèbres des mathématiques.

1. Le radian, une unité naturelle pour les angles

Définition : le radian

Dans un cercle de rayon r , un angle au centre qui intercepte un arc de longueur exactement égale à r a pour mesure **1 radian** (1 rad). Les mesures en degrés et en radians d'un même angle sont **proportionnelles** : un angle plat mesure 180° ou π rad, un tour complet 360° ou 2π rad.

Pour passer d'une unité à l'autre, on utilise un tableau de proportionnalité :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Méthode : convertir

- Degrés $\rightarrow$ radians : on multiplie par $\pi/180$. Exemple : $40^\circ = 40 \times \pi/180 = 2\pi/9$ rad.
- Radians $\rightarrow$ degrés : on multiplie par $180/\pi$. Exemple : $\pi/5$ rad = $\pi/5 \times 180/\pi = 36^\circ$.

Propriété : longueur d'un arc et aire d'un secteur

Dans un cercle de rayon r , un secteur d'angle α (en radians, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$) a pour arc de longueur $\ell = r \times \alpha$ et pour aire $A = 1/2 \times r^2 \times \alpha$.

La longueur est proportionnelle à l'angle : pour $\alpha = 2\pi$, on retrouve le périmètre complet $2\pi r$.

Exemple résolu

Un cercle a pour rayon 8 cm. L'arc intercepté par un angle de $3\pi/4$ rad mesure $\ell = 8 \times 3\pi/4 = 6\pi \approx 18,85$ cm. L'aire du secteur est $\square = 1/2 \times 8^2 \times 3\pi/4 = 24\pi \approx 75,40$ cm².

Pourquoi le radian ?

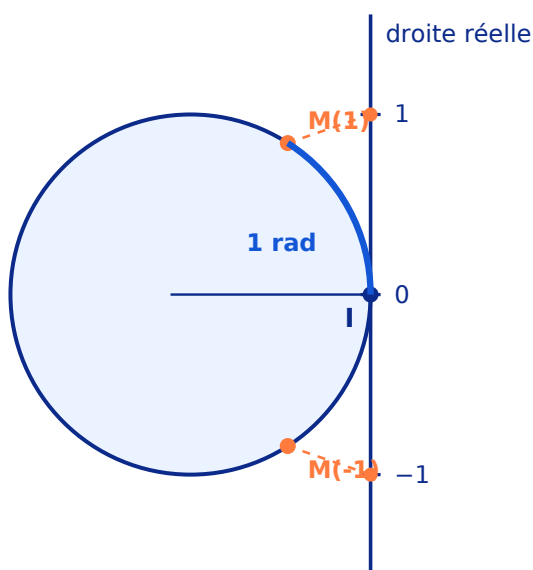
Avec les radians, la longueur de l'arc se lit directement : $\ell = r \times \alpha$, sans aucun facteur à retenir. C'est pour cette raison que les mathématiciens et les physiciens préfèrent cette unité. Sur ta calculatrice, pense à régler le mode **RAD** (et non DEG) dès que l'angle est exprimé avec π .

2. Le cercle trigonométrique et l'enroulement de la droite

Définition : cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J). Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1. On l'oriente : le **sens direct** (ou sens positif) est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Imagine la droite réelle comme un fil gradué, posé verticalement et tangent au cercle en I. Le point d'abscisse 0 du fil est en I. On **enroule** ce fil autour du cercle : la partie positive s'enroule dans le sens direct, la partie négative dans le sens indirect. Comme le cercle a pour périmètre 2π , le réel 2π tombe de nouveau sur I après un tour complet.



Définition : point image d'un réel

À tout réel x , l'enroulement associe un unique point $M(x)$ du cercle trigonométrique.

L'angle orienté (OI, OM) a pour mesure x radians (ou, ce qui revient au même, tout réel

de la forme $x + 2k\pi$ avec k entier relatif).

Propriété : réels qui ont le même point image

Deux réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement si leur différence est un multiple entier de 2π : $M(x) = M(x + 2k\pi)$ pour tout entier relatif k .

Méthode : trouver la mesure principale

La **mesure principale** d'un angle est son unique mesure dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Pour la trouver, on ajoute ou on retranche des multiples de 2π jusqu'à tomber dans cet intervalle.

Exemple

Mesure principale de $19\pi/4$: $19\pi/4 - 2\pi = 11\pi/4$; $11\pi/4 - 2\pi = 3\pi/4$. Et $3\pi/4$ est dans $]-\pi ; \pi]$. Donc $M(19\pi/4) = M(3\pi/4)$.

Mesure principale de $-13\pi/6$: $-13\pi/6 + 2\pi = -\pi/6$. C'est la réponse.

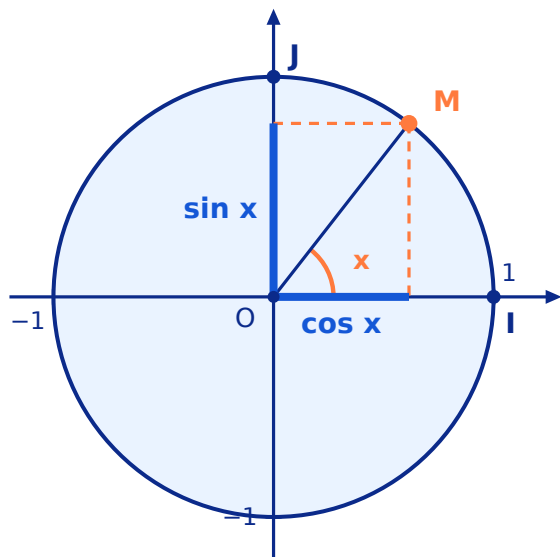
Piège

Une mesure principale est dans $]-\pi ; \pi]$, **pas** dans $[0 ; 2\pi[$. L'angle $3\pi/2$ a pour mesure principale $-\pi/2$ et non $3\pi/2$. Et π est bien sa propre mesure principale ($-\pi$ n'est pas dans l'intervalle, puisqu'il est ouvert en $-\pi$).

3. Cosinus et sinus d'un réel

Définition : cosinus et sinus

Soit x un réel et $M(x)$ son point image sur le cercle trigonométrique. Le **cosinus** de x , noté $\cos x$, est l'**abscisse** de $M(x)$. Le **sinus** de x , noté $\sin x$, est l'**ordonnée** de $M(x)$. Autrement dit : $M(x)$ a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.



Propriétés

- Pour tout réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout réel x : **$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$** .
- Pour tout réel x et tout entier relatif k : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Démonstration. Le point $M(x)$ est sur le cercle de rayon 1, donc ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1 . Le triangle formé par O , le projeté de M sur l'axe des abscisses et M est rectangle : son hypoténuse OM vaut 1, ses côtés de l'angle droit valent $|\cos x|$ et $|\sin x|$. Le théorème de Pythagore donne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1^2 = 1$. La dernière propriété vient de $M(x + 2k\pi) = M(x)$. ■

Exemple : déduire le sinus du cosinus

On sait que $\cos x = \frac{3}{5}$ et que $\sin x < 0$. Alors $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$. Comme $\sin x < 0$, on conclut $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Piège

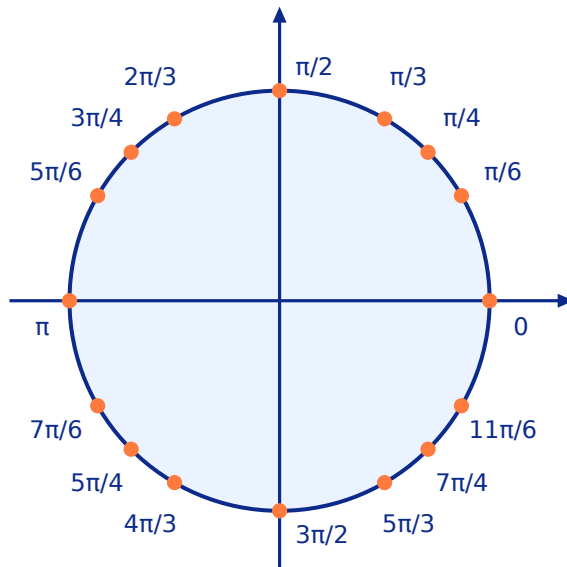
De $\sin^2 x = \frac{16}{25}$, on tire **deux** valeurs possibles pour $\sin x$. Le signe de l'énoncé (position de M dans le plan) permet de choisir. Oublier cette étape est l'erreur la plus fréquente.

4. Les valeurs remarquables

Pour quelques angles, les coordonnées de $M(x)$ se calculent exactement. À connaître par cœur, ou à savoir retrouver très vite :

x (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Justifications. Pour $\pi/4$: M est sur la première bissectrice, donc $\cos x = \sin x = c$. Alors $2c^2 = 1$, d'où $c = \sqrt{2}/2$ car $c > 0$. Pour $\pi/3$: le triangle OIM est isocèle avec un angle de 60° , donc équilatéral de côté 1. Le pied de la hauteur issue de M est le milieu de [OI], donc $\cos \pi/3 = 1/2$; puis $\sin \pi/3 = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$. Le cas $\pi/6$ s'en déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice.

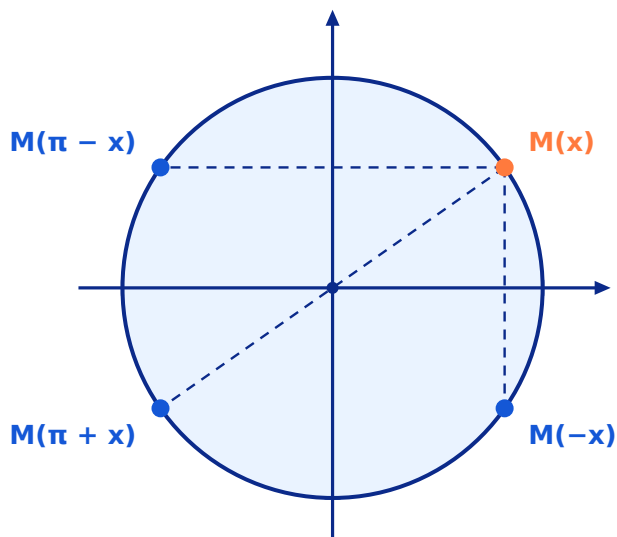


Aide-mémoire (par Mathbot)

Je retiens les sinus de 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ comme $\sqrt{0}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{4}/2$. Et pour les cosinus, je lis la même liste à l'envers. Bip bip, ça marche à tous les coups !

5. Les angles associés

Les points $M(-x)$, $M(\pi - x)$ et $M(\pi + x)$ se déduisent de $M(x)$ par des **symétries** : par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées et à l'origine. Ces symétries changent les signes des coordonnées de façon contrôlée.



Propriétés : angles associés

Angle	cosinus	sinus	Symétrie de $M(x)$
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	axe des abscisses
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$	axe des ordonnées
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$	centre O
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$	première bissectrice
$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$	rotation d'un quart de tour

Démonstration pour $\pi - x$. $M(\pi - x)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées : il a la même ordonnée et une abscisse opposée. Donc $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$. ■ Les autres lignes se justifient de la même manière.

Méthode : calculer cos et sin d'un angle quelconque

1. Ramène l'angle à un angle du premier quadrant : écris-le sous la forme $\pi \pm x$, $-x$ ou $2\pi \pm x$ avec x remarquable.
2. Applique la bonne ligne du tableau.
3. Conclue avec la valeur remarquable.

Exemples résolus

$$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2.$$

$$\sin 7\pi/4 = \sin(-\pi/4 + 2\pi) = \sin(-\pi/4) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2.$$

$$\cos 7\pi/6 = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2.$$

6. Résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Propriété : solutions des équations de base

- Si $|a| > 1$, les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont **aucune solution**.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

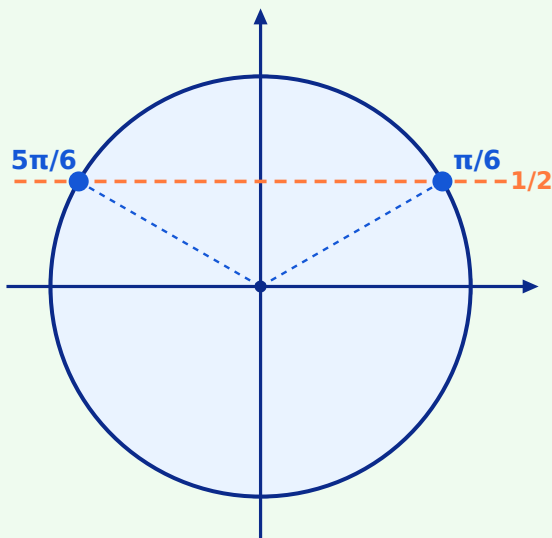
Pourquoi ? Résoudre $\cos x = a$, c'est chercher les points du cercle d'abscisse a : la droite verticale d'équation $X = a$ coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, d'angles α et $-\alpha$. De même pour $\sin x = a$: la droite horizontale $Y = a$ coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, d'angles α et $\pi - \alpha$.

Méthode : résoudre sur un intervalle

1. Isole $\cos x$ ou $\sin x$ pour obtenir une équation de base.
2. Repère une valeur remarquable α telle que $\cos \alpha$ (ou $\sin \alpha$) vaille a .
3. Écris les deux familles de solutions, puis garde uniquement celles qui appartiennent à l'intervalle demandé (en faisant varier l'entier k).

Exemple résolu : $\sin x = 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$

On sait que $\sin \pi/6 = 1/2$. Donc $\sin x = \sin \pi/6$, ce qui donne $x = \pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi - \pi/6 + 2k\pi = 5\pi/6 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$, seul $k = 0$ convient : **$S = \{\pi/6 ; 5\pi/6\}$** .



Exemple résolu : $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ sur $]-\pi ; \pi]$

L'équation équivaut à $\cos x = -\sqrt{3}/2$. Or $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$. Donc $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = -5\pi/6 + 2k\pi$. Dans $]-\pi ; \pi]$: **$S = \{-5\pi/6 ; 5\pi/6\}$** .

Piège

Ne t'arrête jamais à la première solution que donne la calculatrice : il y a presque toujours **deux** points du cercle. Et n'oublie pas que l'intervalle de résolution $(]-\pi ; \pi]$, $[0 ; 2\pi[$, $\mathbb{R}$ tout entier...) change la réponse finale.

7. Les fonctions cosinus et sinus

Définition

La fonction **cosinus** est la fonction $x \mapsto \cos x$, la fonction **sinus** est $x \mapsto \sin x$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ et prennent leurs valeurs dans $[-1 ; 1]$.

Propriétés : parité et périodicité

- La fonction cosinus est **paire** : $\cos(-x) = \cos x$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus est **impaire** : $\sin(-x) = -\sin x$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O.
- Les deux fonctions sont **périodiques de période 2π** : $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout réel x . Leurs courbes se « répètent » par translation de vecteur $2\pi \cdot i$.

Démonstration. Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : ils ont la même abscisse ($\cos(-x) = \cos x$) et des ordonnées opposées ($\sin(-x) = -\sin x$). La périodicité vient de $M(x + 2\pi) = M(x)$. ■

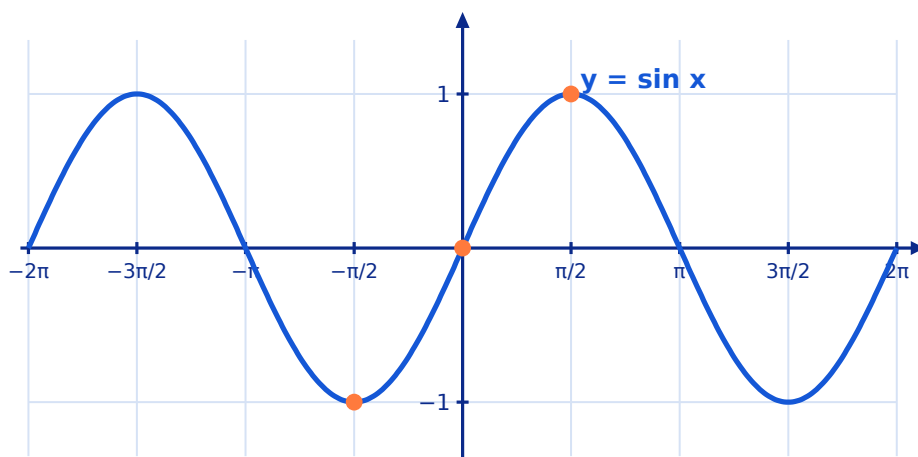
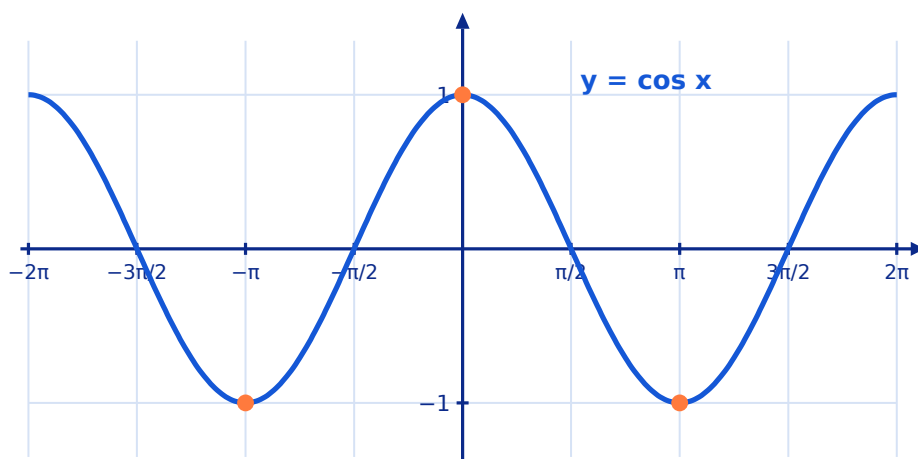
Conséquence pratique. Il suffit d'étudier ces fonctions sur $[0 ; \pi]$: la parité donne le reste de $[-\pi ; \pi]$, puis la périodicité donne tout $\mathbb{R}$.

Variations sur $[0 ; \pi]$

x	0	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\searrow 0$	$\searrow -1$
$\sin x$	0	$\nearrow 1$	$\searrow 0$

La fonction cosinus est donc décroissante sur $[0 ; \pi]$. La fonction sinus est croissante sur $[0 ; \pi/2]$ puis décroissante sur $[\pi/2 ; \pi]$.

Voici les courbes sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$:



Valeurs particulières et translation

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$; $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Comme $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, la courbe du sinus s'obtient en translatant celle du cosinus de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite.

Exemple : parité d'une fonction composée

Soit $f(x) = x \cdot \sin x$. Pour tout réel x , $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \sin x = f(x)$. La fonction f est donc **paire**.

8. Inéquations trigonométriques

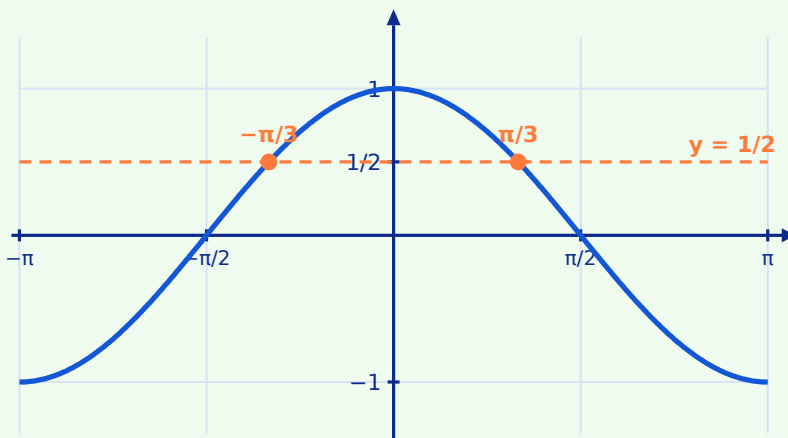
Pour résoudre $\cos x \geq a$ ou $\sin x \leq a$, on lit la réponse sur le **cercle** (quels arcs sont à droite de la droite verticale, au-dessus de la droite horizontale...) ou sur la **courbe** (où la courbe est au-dessus ou en dessous de la droite $y = a$).

Méthode

1. Résous d'abord l'équation associée sur l'intervalle demandé : ses solutions sont les bornes possibles.
2. Repère, sur le cercle ou sur la courbe, de quel côté se trouve l'inégalité.
3. Écris l'ensemble solution sous forme d'intervalle(s), en précisant si les bornes sont incluses (inégalité large) ou non (inégalité stricte).

Exemple résolu : $\cos x \geq 1/2$ sur $]-\pi ; \pi]$

Équation associée : $\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/3$ ou $x = -\pi/3$ sur $]-\pi ; \pi]$. La courbe du cosinus est au-dessus de la droite $y = 1/2$ autour de 0, entre ces deux valeurs. Donc **S** = $[-\pi/3 ; \pi/3]$.



Piège

Une inéquation ne se résout pas en « faisant comme une équation » : si tu obtiens seulement les deux solutions, il faut encore déterminer **quel arc** (intérieur ou extérieur aux deux points) vérifie l'inégalité. Teste toujours une valeur, par exemple $x = 0$.

À retenir

- π rad = 180° . Conversion : degrés $\times \pi/180$ = radians. Arc : $\ell = r\alpha$; aire du secteur : $\frac{1}{2}r^2\alpha$.
- Le cercle trigonométrique est orienté dans le sens direct (contraire des aiguilles d'une montre) ; $M(x) = M(x + 2k\pi)$. Mesure principale dans $]-\pi ; \pi]$.
- $M(x)$ a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$. $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Valeurs remarquables : $\cos(0 ; \pi/6 ; \pi/4 ; \pi/3 ; \pi/2) = 1 ; \sqrt{3}/2 ; \sqrt{2}/2 ; 1/2 ; 0$ et $\sin = 0 ; 1/2 ; \sqrt{2}/2 ; \sqrt{3}/2 ; 1$.
- Angles associés : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi$; $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
- Cosinus : paire, 2π -périodique. Sinus : impaire, 2π -périodique. Leurs courbes oscillent

entre -1 et 1 .

- Pour une inéquation : on résout l'équation associée, puis on lit sur le cercle ou sur la courbe quel arc convient.