

Trigonométrie dans le triangle rectangle

Corrigé des exercices - 3ème

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Vocabulaire du triangle ★★★

- L'angle droit est en F, donc l'hypoténuse est le côté en face : **[EG]**.
- Le côté opposé à $\angle EGF$ est celui qui ne touche pas G : **[EF]**.
- Le côté adjacent à $\angle EGF$ est le côté de l'angle droit qui touche G : **[FG]**.
- Pour $\angle FEG$, le côté opposé est **[FG]** et le côté adjacent est **[EF]** : les rôles sont échangés.

2 Écrire les relations ★★★

Le triangle RST est rectangle en S : son hypoténuse est [RT].

Pour $\angle SRT$: le côté adjacent est [RS] et le côté opposé est [ST].

$\cos \angle SRT = \mathbf{RS/RT}$; $\sin \angle SRT = \mathbf{ST/RT}$; $\tan \angle SRT = \mathbf{ST/RS}$.

Pour $\angle RTS$: le côté adjacent est [ST] et le côté opposé est [RS].

$\cos \angle RTS = \mathbf{ST/RT}$; $\sin \angle RTS = \mathbf{RS/RT}$; $\tan \angle RTS = \mathbf{RS/ST}$.

3 Vrai ou faux ? ★★★

L'hypoténuse est [MP].

- Vrai** : pour $\angle MPN$, le côté opposé est [MN] et l'hypoténuse est [MP].
- Vrai** : pour $\angle NMP$, le côté opposé est [NP] et le côté adjacent est [MN].
- Faux** : [MN] est le côté *opposé* à $\angle MPN$, pas l'adjacent. Le cosinus vaut $NP \div MP$.
- Vrai** : pour $\angle MPN$, le côté opposé est [MN] et le côté adjacent est [NP].
- Faux** : pour $\angle NMP$, le côté adjacent est [MN], donc $\cos \angle NMP = MN \div MP$.

4 Premiers pas avec la calculatrice ★★★

- $\sin 20^\circ \approx \mathbf{0,34}$
- $\cos 70^\circ \approx \mathbf{0,34}$
- $\tan 35^\circ \approx \mathbf{0,70}$
- $\cos 48^\circ \approx \mathbf{0,67}$

Remarque : $\sin 20^\circ$ et $\cos 70^\circ$ sont égaux. C'est normal : 20° et 70° sont des angles complémentaires ($20 + 70 = 90$), et le côté opposé à l'un est le côté adjacent à l'autre.

5 Retrouver un angle ★★★

- a. $x = \sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$.
- b. $x = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ$, soit **37°** .
- c. $x = \tan^{-1}(2) \approx 63,43^\circ$, soit **63°** .
- d. $x = \sin^{-1}(0,9) \approx 64,16^\circ$, soit **64°** .

6 Quel rapport choisir ? ★★★

- a. Opposé et hypoténuse : le **sinus**. $\sin \alpha = \text{opposé/hypoténuse}$.
- b. Adjacent et hypoténuse : le **cosinus**. $\cos \alpha = \text{adjacent/hypoténuse}$.
- c. Opposé et adjacent : la **tangente**. $\tan \alpha = \text{opposé/adjacent}$.
- d. Opposé et hypoténuse : le **sinus**, puis la touche $\sin^{-1}$: $\alpha = \sin^{-1}(\text{opposé/hypoténuse})$.

7 Une longueur avec la tangente ★★★

Dans le triangle ABC rectangle en A, pour l'angle $\angle ABC$: [AC] est le côté opposé et [AB] est le côté adjacent. On utilise la tangente.

$$\tan \angle ABC = \mathbf{AC/AB}, \text{ soit } \tan 40^\circ = \mathbf{AC/6}.$$

$$AC = 6 \times \tan 40^\circ \approx 5,035.$$

$$\mathbf{AC \approx 5,0 \text{ cm.}}$$

8 Une hypoténuse avec le sinus ★★★

Dans le triangle DEF rectangle en E, [EF] est le côté opposé à $\angle EDF$ et [DF] est l'hypoténuse. On utilise le sinus.

$$\sin \angle EDF = \mathbf{EF/DF}, \text{ soit } \sin 35^\circ = \mathbf{8/DF}.$$

$$DF = 8 \div \sin 35^\circ \approx 13,948.$$

$$\mathbf{DF \approx 13,9 \text{ cm.}}$$

Contrôle : l'hypoténuse doit être plus longue que 8 cm, c'est bien le cas.

9 Un angle avec la tangente ★★★

Dans le triangle GHI rectangle en H, pour l'angle $\angle HGI$: [HI] est le côté opposé et [GH] est le côté adjacent. On utilise la tangente.

$$\tan \angle HGI = \mathbf{HI/GH} = \mathbf{7/4} = 1,75.$$

$$\angle HGI = \tan^{-1}(1,75) \approx 60,26^\circ, \text{ soit } \mathbf{60^\circ}.$$

Les deux angles aigus sont complémentaires : $\angle HIG = 90^\circ - 60^\circ = \mathbf{30^\circ}$.

10 Adjacent connu, deux inconnues ★★★

Dans JKL rectangle en K, pour l'angle $\angle KJL$: [JK] est le côté adjacent, [KL] est le côté opposé et [JL] est l'hypoténuse.

Calcul de KL (opposé et adjacent : tangente) : $\tan 62^\circ = \mathbf{KL/5,4}$, donc $KL = 5,4 \times \tan 62^\circ \approx 10,156$, soit **KL $\approx$ 10,2 cm**.

Calcul de JL (adjacent et hypoténuse : cosinus) : $\cos 62^\circ = \mathbf{5,4/JL}$, donc $JL = 5,4 \div \cos 62^\circ \approx 11,502$, soit **JL $\approx$ 11,5 cm**.

Vérification avec Pythagore : $132,30 \approx 132,30$, c'est cohérent.

11 Triangle entièrement résolu ★★★

- ABC est rectangle en B : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$, donc $AC = \sqrt{225} = \mathbf{15 \text{ cm}}$.
- Pour $\angle BAC$, [BC] est opposé et [AB] est adjacent : $\tan \angle BAC = \mathbf{12/9}$, donc $\angle BAC = \tan^{-1}(\mathbf{12/9}) \approx 53,13^\circ$, soit **53°**.
Pour $\angle BCA$, on peut utiliser le sinus : $\sin \angle BCA = \mathbf{AB/AC} = \mathbf{9/15} = 0,6$, donc $\angle BCA \approx 36,87^\circ$, soit **37°**.
- $53^\circ + 37^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Les arrondis tombent juste : la somme fait bien 180° .

12 L'échelle du peintre ★★★

Le mur et le sol forment un angle droit : l'échelle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

- La hauteur est le côté **opposé** à l'angle de 72° , l'échelle est l'hypoténuse : $\sin 72^\circ = \mathbf{hauteur/4,2}$. Donc hauteur = $4,2 \times \sin 72^\circ \approx 3,994$. **L'échelle touche le mur à environ 3,99 m du sol.**
- La distance est le côté **adjacent** : $\cos 72^\circ = \mathbf{distance/4,2}$. Donc distance = $4,2 \times \cos 72^\circ \approx 1,298$. **Le pied de l'échelle est à environ 1,30 m du mur.**

Vérification : $17,64 \approx 4,2^2 = 17,64$.

13 Une rampe pour fauteuil roulant ★★★

- Le schéma est un triangle rectangle : la rampe (5,5 m) est l'hypoténuse, la marche (0,45 m) est le côté vertical opposé à l'angle α , et le sol est le côté adjacent.
- $\sin \alpha = \mathbf{0,45/5,5} \approx 0,0818$, donc $\alpha = \sin^{-1}(0,0818) \approx \mathbf{4,7^\circ}$.
- $4,7^\circ$ est inférieur à 5° : **la rampe convient**.

14 Hauteur d'un clocher ★★★

Le clocher est vertical : le triangle formé par le clocher, l'ombre et le rayon est rectangle au pied du clocher. La hauteur est le côté opposé à l'angle de 41° et l'ombre est le côté adjacent : on utilise la tangente.

$\tan 41^\circ = \mathbf{hauteur/14,5}$, donc hauteur = $14,5 \times \tan 41^\circ \approx 12,605$.

Le clocher mesure environ 12,6 m.

15 Chasse à l'erreur ★★★

- Non : BC est l'hypoténuse, donc BC doit être plus longue que $AB = 7$ cm. Or 4,5 cm est plus court que 7 cm.
- Lucas a inversé le quotient. Le cosinus est « adjacent $\div$ hypoténuse » : ici l'adjacent est AB et l'hypoténuse est BC. La bonne relation est $\cos 50^\circ = \mathbf{AB/BC} = \mathbf{7/BC}$.
D'où $BC = 7 \div \cos 50^\circ \approx 10,890$, soit **BC $\approx$ 10,9 cm**.

16 Triangle isocèle ★★★

- Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi une hauteur. Donc (CH) est perpendiculaire à (AB) et AHC est rectangle en H, avec $AH = 10 \div 2 = 5$ cm.
- Pour $\angle CAH$, [CH] est le côté opposé et [AH] le côté adjacent : $\tan 50^\circ = \mathbf{CH/5}$, donc $CH = 5 \times \tan 50^\circ \approx 5,959$, soit **CH $\approx$ 6,0 cm**.
- [AC] est l'hypoténuse : $\cos 50^\circ = \mathbf{AH/AC} = \mathbf{5/AC}$, donc $AC = 5 \div \cos 50^\circ \approx 7,779$, soit **AC $\approx$ 7,8 cm**.
- Aire = **base $\times$ hauteur/2** = $\mathbf{10 \times 5,959/2} \approx 29,79$, soit environ **30 cm²**.

17 Dimensions d'un rectangle ★★★

- ABC est rectangle en B (c'est un angle du rectangle). Pour $\angle CAB$, [AB] est le côté adjacent, [BC] le côté opposé, [AC] l'hypoténuse.

$\cos 25^\circ = \mathbf{AB/13}$, donc $AB = 13 \times \cos 25^\circ \approx 11,782$, soit **AB $\approx$ 11,8 cm.**

$\sin 25^\circ = \mathbf{BC/13}$, donc $BC = 13 \times \sin 25^\circ \approx 5,494$, soit **BC $\approx$ 5,5 cm.**

b. Périmètre = $2 \times (AB + BC) \approx 2 \times (11,8 + 5,5) = 34,6$, soit environ **35 cm.**

c. $AB^2 + BC^2 \approx 138,82 + 30,18 = 169,00$ et $13^2 = 169$. Les résultats sont cohérents.

18 Le toit d'un garage ★★★

a. $AH = 8 \div 2 = 4$ m et AHS est rectangle en H. Pour $\angle SAH$: [SH] est opposé, [AH] est adjacent. $\tan 30^\circ = \mathbf{SH/4}$, donc $SH = 4 \times \tan 30^\circ \approx 2,309$. **SH $\approx$ 2,31 m.**

b. [AS] est l'hypoténuse : $\cos 30^\circ = \mathbf{4/AS}$, donc $AS = 4 \div \cos 30^\circ \approx 4,619$. **AS $\approx$ 4,62 m.**

c. Un versant est un rectangle de 4,62 m sur 6 m, soit 27,71 m². Il y a deux versants : 55,43 m², soit environ **55 m².**

19 Hauteur d'une tour : deux observations ★★★

a. Dans le triangle SHA rectangle en H : $\tan 30^\circ = \mathbf{h/AH}$, donc $AH = \mathbf{h/\tan 30^\circ} \approx 1,732 \times h$.

Dans le triangle SHB rectangle en H : $\tan 45^\circ = \mathbf{h/BH} = 1$, donc $BH = h$.

b. A, B et H sont alignés avec B entre A et H : $AH - BH = AB = 50$. On obtient $1,732 \times h - h = 50$, soit $0,732 \times h = 50$.

c. $h = 50 \div 0,732 \approx 68,30$. **La tour mesure environ 68 m.**

Remarque : on n'a arrondi qu'à la fin, en gardant la valeur de la calculatrice : avec les valeurs arrondies à trois décimales, on trouve le même résultat au mètre près.

20 Deux bateaux devant un phare ★★★

a. Dans SHB1 rectangle en H : [SH] est opposé à l'angle de 40° , [HB1] est adjacent : $\tan 40^\circ = \mathbf{60/HB1}$, donc $HB1 = 60 \div \tan 40^\circ \approx 71,505$, soit **71,5 m.**

Dans SHB2 rectangle en H : $\tan 65^\circ = \mathbf{60/HB2}$, donc $HB2 = 60 \div \tan 65^\circ \approx 27,978$, soit **28,0 m.**

b. Les trois points étant alignés avec B2 entre B1 et H : $B1B2 = HB1 - HB2 \approx 43,53$. **Les bateaux sont distants d'environ 44 m.**

21 Un cône de révolution ★★★

a. (SO) est perpendiculaire au plan de la base, donc à (OM) : SOM est rectangle en O. $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc **SM = 13 cm.**

b. Pour $\angle OSM$, [OM] est opposé et [SO] adjacent : $\tan \angle OSM = \mathbf{5/12}$. Donc $\angle OSM = \tan^{-1}(\mathbf{5/12}) \approx 22,62^\circ$, soit **23°.**

c. $\sin \angle OSM = \mathbf{OM/SM} = \mathbf{5/13}$, donc $\angle OSM = \sin^{-1}(\mathbf{5/13}) \approx 22,62^\circ$. $\cos \angle OSM = \mathbf{SO/SM} = \mathbf{12/13}$, donc $\angle OSM = \cos^{-1}(\mathbf{12/13}) \approx 22,62^\circ$. Les trois méthodes

donnent le même angle, environ 23° .

- d. La hauteur coupe l'angle d'ouverture en deux angles égaux : $2 \times 22,62^\circ \approx 45,24^\circ$, soit environ **45°** .

22 Démontrer des relations ★★★

- a. Pour α en B : adjacent = c, opposé = b, hypoténuse = a. Donc $\cos \alpha = \mathbf{c/a}$, $\sin \alpha = \mathbf{b/a}$, $\tan \alpha = \mathbf{b/c}$.
- b. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \mathbf{c^2/a^2 + b^2/a^2 = b^2 + c^2/a^2}$. D'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A, $a^2 = b^2 + c^2$. Donc le quotient vaut $\mathbf{a^2/a^2 = 1}$.
- c. $\mathbf{\sin \alpha / \cos \alpha = b/a \div c/a = b/a \times a/c = b/c = \tan \alpha}$.
- d. $\cos^2 \alpha = 0,36$, donc $\sin^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$. Comme α est aigu, $\sin \alpha$ est positif : $\sin \alpha = \sqrt{0,64} = \mathbf{0,8}$. On a alors $\tan \alpha = 0,8 \div 0,6 = \mathbf{4/3}$.

23 Descente d'un avion ★★★

- a. Le schéma est un triangle rectangle : le côté vertical (altitude 1 000 m) est opposé à l'angle de 3° , le sol est le côté adjacent, la trajectoire est l'hypoténuse.
- b. $\tan 3^\circ = \mathbf{1000/d}$, donc $d = 1000 \div \tan 3^\circ \approx 19081,1$ m, soit environ **$19,1$ km**.
- c. $\sin 3^\circ = \mathbf{1000/L}$, donc $L = 1000 \div \sin 3^\circ \approx 19107,3$ m, soit environ **$19,1$ km**. Pour un angle aussi petit, la trajectoire est à peine plus longue que la distance au sol.

24 Un triangle qui n'est pas rectangle ★★★

- a. Dans ABH rectangle en H : $\tan 40^\circ = \mathbf{AH/BH = 6/BH}$, donc $BH = 6 \div \tan 40^\circ \approx 7,151$, soit **$7,15$ m**.
Dans ACH rectangle en H : $\tan 55^\circ = \mathbf{6/HC}$, donc $HC = 6 \div \tan 55^\circ \approx 4,201$, soit **$4,20$ m**.
- b. H est entre B et C, donc $BC = BH + HC \approx 7,151 + 4,201 = 11,352$, soit **$BC \approx 11,35$ m**.
- c. $\sin 40^\circ = \mathbf{6/AB}$, donc $AB = 6 \div \sin 40^\circ \approx 9,334$, soit **$AB \approx 9,33$ m**.
 $\sin 55^\circ = \mathbf{6/AC}$, donc $AC = 6 \div \sin 55^\circ \approx 7,325$, soit **$AC \approx 7,32$ m**.