

# Trigonométrie dans le triangle rectangle

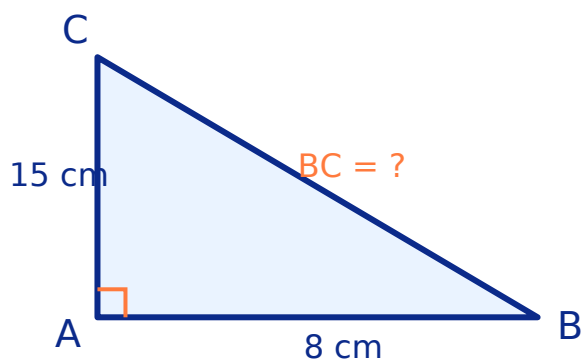
## Cours de maths - 3ème

Mesurer la hauteur d'un arbre sans y grimper, calculer la pente d'une rampe, régler l'inclinaison d'un toit : la **trigonométrie** sert à tout cela. Dans ce chapitre, tu découvres trois rapports de longueurs, le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente**, qui relient les **angles** et les **côtés** d'un triangle rectangle. Avec ta calculatrice, tu sauras trouver une longueur ou un angle manquant.

## 1. Rappels : le triangle rectangle et Pythagore

**Hypoténuse** Dans un triangle rectangle, le côté situé en face de l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**. C'est toujours le **plus long** des trois côtés. Les deux autres côtés sont les côtés de l'angle droit.

**Théorème de Pythagore** Si un triangle ABC est rectangle en A, alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . On additionne les carrés des côtés de l'angle droit pour obtenir le carré de l'hypoténuse.



**Exemple** Le triangle ABC est rectangle en A avec  $AB = 8 \text{ cm}$  et  $AC = 15 \text{ cm}$ . D'après le théorème de Pythagore :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$ . Donc  $BC = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$ .

**Pourquoi un nouvel outil ?** Pythagore ne fonctionne que si tu connais **deux côtés**. Si on te donne un seul côté et un angle, il ne suffit plus : c'est la trigonométrie qui prend le relais.

## 2. Côté opposé, côté adjacent, hypoténuse

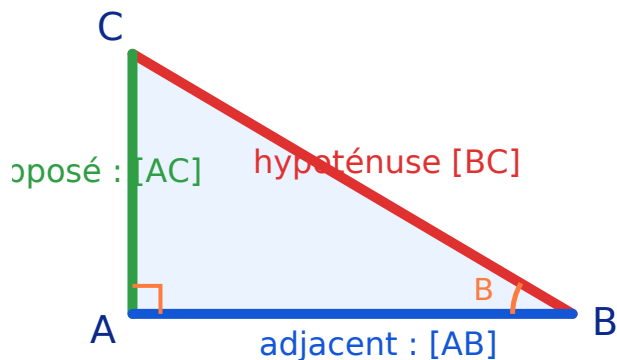
Dans un triangle rectangle, on choisit un des deux angles aigus (ni l'angle droit, ni un

autre). Les noms des deux côtés de l'angle droit dépendent alors de **l'angle choisi**.

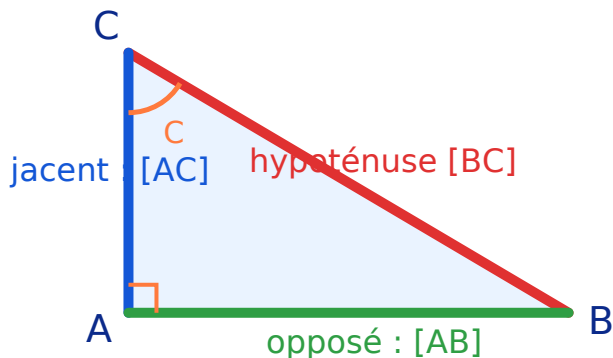
**Vocabulaire** Pour un angle aigu donné :

- le **côté opposé** est le côté qui est en face de cet angle (il ne touche pas son sommet) ;
- le **côté adjacent** est le côté de l'angle droit qui touche cet angle (« adjacent » veut dire « qui touche ») ;
- l'**hypoténuse** est le côté en face de l'angle droit.

Dans le triangle ABC rectangle en A, voici les trois côtés vus depuis l'angle B (hypoténuse en rouge, côté opposé en vert, côté adjacent en bleu).



Maintenant, on regarde le **même triangle** depuis l'angle C. L'hypoténuse ne change pas, mais les deux autres côtés **échangent leurs rôles**.



**Piège** Ne dis jamais « le côté opposé » tout court : il faut toujours préciser « opposé à **quel angle** ». Avant de commencer un exercice, repère l'angle utilisé et colorie les trois côtés.

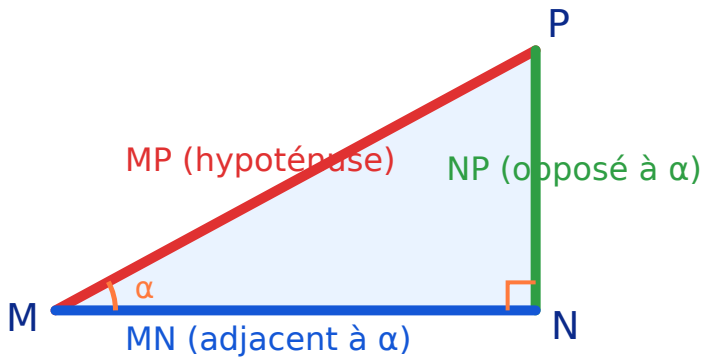
### 3. Cosinus, sinus et tangente

**Définitions** Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu  $\alpha$  :

**$\cos \alpha = \text{longueur du côté adjacent} / \text{longueur de l'hypoténuse}$**

**$\sin \alpha = \text{longueur du côté opposé} / \text{longueur de l'hypoténuse}$**

**$\tan \alpha = \text{longueur du côté opposé} / \text{longueur du côté adjacent}$**



**Dans le triangle MNP rectangle en N** Pour l'angle  $\alpha$  placé en M :  $\cos \alpha = \mathbf{MN/MP}$  ;  $\sin \alpha = \mathbf{NP/MP}$  ;  $\tan \alpha = \mathbf{NP/MN}$ .  
Pour l'angle placé en P, tout change :  $\cos P = \mathbf{NP/MP}$  ;  $\sin P = \mathbf{MN/MP}$  ;  $\tan P = \mathbf{MN/NP}$ .

**Un moyen de retenir** Pense à la phrase « **CAH - SOH - TOA** » : **C**osinus = **A**ddjacent sur **H**ypoténuse ; **S**inus = **O**pposé sur **H**ypoténuse ; **T**angente = **O**pposé sur **A**ddjacent.

Ces rapports ne dépendent **que de l'angle**, pas de la taille du triangle : si tu agrandis ou réduis un triangle, les longueurs changent mais pas leur quotient. C'est pour cela qu'on peut les calculer avec une calculatrice.

**À savoir** Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris **entre 0 et 1**, car un côté de l'angle droit est plus court que l'hypoténuse. La tangente, elle, peut être plus grande que 1. Enfin :  $\tan \alpha = \mathbf{\sin \alpha / \cos \alpha}$ .

## 4. Utiliser la calculatrice

### Régler et utiliser sa calculatrice

1. Vérifie que la calculatrice est en mode **degrés** (on voit « D » ou « DEG » à l'écran). C'est l'erreur numéro un !
2. Pour le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle, utilise les touches **cos**, **sin**, **tan** : par exemple  $\tan 35^\circ \approx 0,700$ .
3. Pour retrouver un **angle** à partir d'un rapport, utilise les touches  **$\cos^{-1}$** ,  **$\sin^{-1}$** ,  **$\tan^{-1}$**  (souvent obtenues avec la touche « seconde » ou « shift »).

**Exemples**  $\sin 40^\circ \approx 0,643$  ;  $\cos 40^\circ \approx 0,766$ .

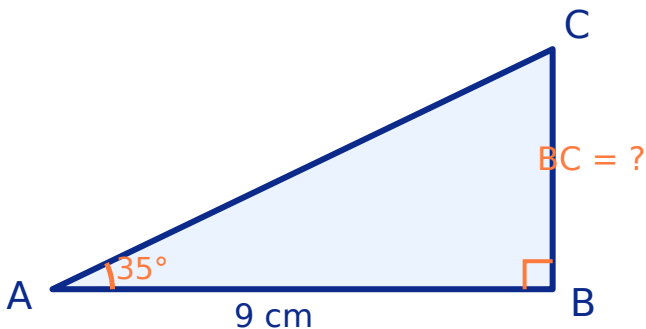
Si  $\cos \alpha = 0,6$ , alors  $\alpha = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,1^\circ$ , soit environ **53°** au degré près.

**Arrondis** On n'arrondit qu'à la **fin** du calcul. Si tu arrondis le sinus ou la tangente avant de calculer, ton résultat final peut être faux d'un millimètre ou d'un degré.

## 5. Calculer une longueur

### Méthode

1. Repère l'angle connu et colorie : hypoténuse, côté opposé, côté adjacent.
2. Choisis le rapport qui contient **la longueur cherchée** et **la longueur connue** : si on parle d'opposé et d'hypoténuse, c'est le sinus ; d'adjacent et d'hypoténuse, le cosinus ; d'opposé et d'adjacent, la tangente.
3. Écris la relation, remplace par les valeurs, puis résous l'équation.
4. Termine par une phrase avec l'unité.



**Exemple 1 : le côté cherché est le numérateur** ABC est rectangle en B,  $AB = 9$  cm et  $\angle BAC = 35^\circ$ . On cherche BC.

Pour l'angle A, BC est le côté **opposé** et AB est le côté **adjacent**. On utilise la tangente.  
 $\tan 35^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{9}$ , donc  $BC = 9 \times \tan 35^\circ \approx 6,30$ .

**BC  $\approx$  6,3 cm** (arrondi au mm).

**Exemple 2 : le côté cherché est le dénominateur** Même triangle : on cherche maintenant l'hypoténuse AC. Elle touche l'angle connu avec le côté adjacent AB : cosinus.

$\cos 35^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{AC}$ , donc  $AC = \frac{9}{\cos 35^\circ} \approx 10,99$ .

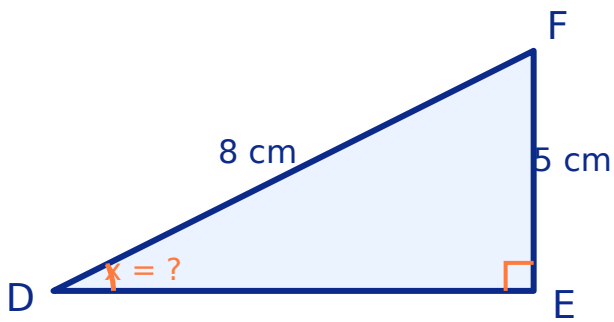
**AC  $\approx$  11,0 cm.**

**Pas de panique avec l'inconnue en bas** Quand l'inconnue est au dénominateur, on fait « l'inverse » : dans  $\frac{9}{AC} = \cos 35^\circ$ , on a  $AC = 9 \div \cos 35^\circ$ . On peut aussi vérifier avec Pythagore :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , ce qui donne bien le même résultat.

## 6. Calculer un angle

### Méthode

1. Repère les deux côtés connus par rapport à l'angle cherché.
2. Choisis cosinus, sinus ou tangente selon ces deux côtés.
3. Écris par exemple  $\tan x = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$  avec les valeurs.
4. Utilise la touche  $\tan^{-1}$  (ou  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ ) pour obtenir l'angle, puis arrondis.



**Exemple** DEF est rectangle en E, EF = 5 cm et DF = 8 cm. On cherche l'angle  $x = \angle EDF$ .

EF est le côté opposé à  $x$  et DF est l'hypoténuse : on utilise le sinus.

$\sin x = \frac{EF}{DF} = \frac{5}{8} = 0,625$ , donc  $x = \sin^{-1}(0,625) \approx 38,7^\circ$ .

$\angle EDF \approx 39^\circ$  au degré près.

L'autre angle aigu vaut  $90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$ , car la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$  et il y a déjà un angle droit.

**Ne confonds pas** «  $\sin 30^\circ$  » et «  $\sin^{-1}(0,5)$  » ne sont pas la même chose. La touche sin sert à passer de l'**angle** au **rapport** ; la touche  $\sin^{-1}$  fait le chemin inverse, du **rapport** à l'**angle**. Et  $\sin^{-1}(x)$  n'est pas égal à  $1/\sin x$ .

## 7. Quelques valeurs et relations à connaître

| Angle      | sin            | cos            | tan            |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| $30^\circ$ | 0,5            | $\approx 0,87$ | $\approx 0,58$ |
| $45^\circ$ | $\approx 0,71$ | $\approx 0,71$ | 1              |
| $60^\circ$ | $\approx 0,87$ | 0,5            | $\approx 1,73$ |

**Deux relations** Pour un angle aigu  $\alpha$  d'un triangle rectangle :

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  (ce résultat vient du théorème de Pythagore) ;
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

**Vérification** Dans un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5, l'angle  $\alpha$  opposé au côté 3 vérifie  $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$  et  $\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$ . On a bien  $0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$  et  $\frac{0,6}{0,8} = 0,75 = \frac{3}{4} = \tan \alpha$ .

Autres faits utiles : deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires** (leur somme vaut  $90^\circ$ ), et le sinus de l'un est le cosinus de l'autre :  $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ .

## 8. Problèmes concrets

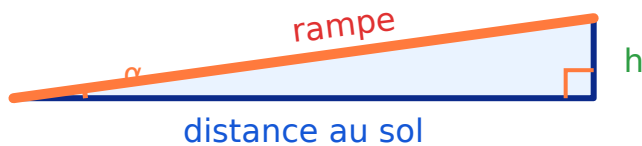
En situation réelle, on commence toujours par **faire un schéma** et y repérer un triangle

Fiche en ligne : [maths-facile.eu/trigonometrie-dans-le-triangle-rectangle-cours-3eme/](https://maths-facile.eu/trigonometrie-dans-le-triangle-rectangle-cours-3eme/) · Cours, exercices et contrôles

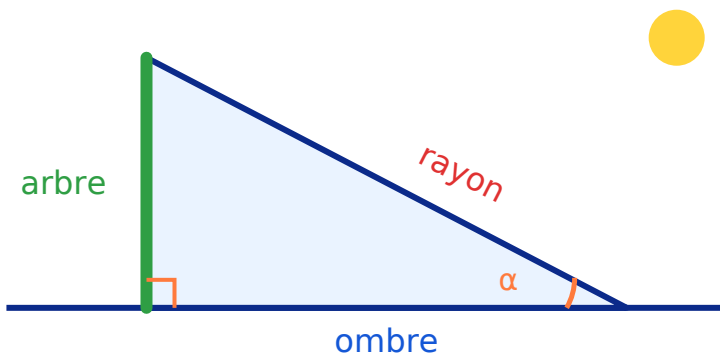
rectangle. Voici trois grands classiques.

**La rampe d'accès** Une rampe de 6 m de long monte de 0,5 m. Quel angle fait-elle avec le sol ?

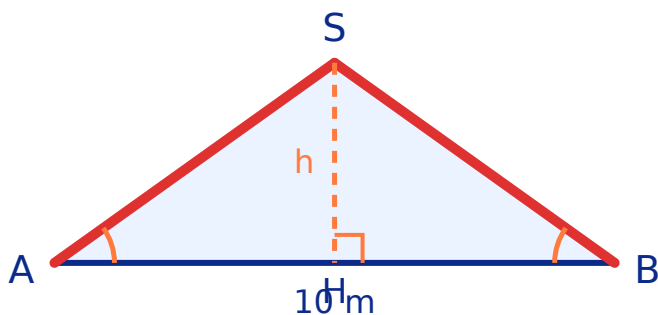
La rampe est l'hypoténuse, la hauteur 0,5 m est le côté opposé :  $\sin \alpha = \mathbf{0,5/6} \approx 0,083$ , donc  $\alpha = \sin^{-1}(0,083) \approx \mathbf{4,8^\circ}$ .



**La hauteur d'un arbre grâce à son ombre** Au moment où les rayons du soleil font un angle de  $38^\circ$  avec le sol, l'ombre d'un arbre mesure 12 m. L'arbre est vertical, donc le triangle est rectangle au pied de l'arbre. La hauteur est le côté opposé à l'angle, l'ombre est le côté adjacent :  $\tan 38^\circ = \mathbf{\text{hauteur}/12}$ .  
hauteur =  $12 \times \tan 38^\circ \approx 9,38$  : l'arbre mesure environ **9,4 m**.



**Le toit d'une maison** La charpente a un triangle isocèle SAB de base AB = 10 m. Chaque pente du toit fait  $35^\circ$  avec l'horizontale. On trace la hauteur [SH] : H est le milieu de [AB], donc AH = 5 m.  
Hauteur du faîtage :  $SH = 5 \times \tan 35^\circ \approx 3,50$  m. Longueur d'un versant :  $AS = \mathbf{5/\cos 35^\circ} \approx 6,10$  m.



**Mathbot te conseille** « Dans un triangle qui n'est pas rectangle, trace une hauteur pour t'en fabriquer un ! Les deux triangles rectangles obtenus te permettent d'utiliser cosinus, sinus ou tangente. »

## À retenir

- Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu : **hypoténuse** (en face de l'angle droit), **côté opposé** (en face de l'angle) et **côté adjacent** (qui touche l'angle).
- $\cos \alpha = \text{adjacent} \div \text{hypoténuse}$  ;  $\sin \alpha = \text{opposé} \div \text{hypoténuse}$  ;  $\tan \alpha = \text{opposé} \div \text{adjacent}$  (« CAH - SOH - TOA »).
- Calculatrice en **mode degrés** : touches cos, sin, tan pour un angle, et  $\cos^{-1}$ ,  $\sin^{-1}$ ,  $\tan^{-1}$  pour retrouver un angle.
- Pour une longueur : choisis le rapport qui contient la longueur connue et la longueur cherchée, puis résous l'équation.
- Pour un angle : calcule le rapport des deux côtés connus, puis utilise la touche « moins un ».
- $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  sont compris entre 0 et 1 ;  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  ;  $\tan \alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$ .
- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires (somme  $90^\circ$ ).
- On n'arrondit qu'à la fin, et on termine par une phrase réponse avec l'unité.