

Variables aléatoires et loi binomiale

Corrigé du contrôle - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Loi d'une variable aléatoire / 5 pts

Calculatrice autorisée.

- (1 pt) La somme vaut 1 : $a = 1 - (0,4 + 0,3 + 0,2) = 0,1$.
- (1 pt) $E(X) = (-4) \times 0,4 + 1 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = -1,6 + 0,3 + 0,6 + 1 = 0,3$.
- (2 pts) $E(X^2) = 16 \times 0,4 + 0,3 + 9 \times 0,2 + 100 \times 0,1 = 6,4 + 0,3 + 1,8 + 10 = 18,5$ (1 pt) ; $V(X) = 18,5 - 0,3^2 = 18,41$; $\sigma(X) = \sqrt{18,41} \approx 4,29$ (1 pt).
- (1 pt) $E(Y) = 2 \times 0,3 + 1 = 1,6$; $V(Y) = 2^2 \times 18,41 = 73,64$.

2 Reconnaître une loi binomiale / 3 pts

- (1 pt) Oui : tirages identiques et indépendants, succès « bleue » de probabilité 0,4. X suit $B(15 ; 0,4)$.
- (1 pt) Non : sans remise, les tirages ne sont pas indépendants.
- (1 pt) Oui : 12 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, $p = 0,7$. X suit $B(12 ; 0,7)$.

3 Coefficients binomiaux / 2 pts

- (1 pt) $C(8 ; 3) = 8! \div (3! \times 5!) = (8 \times 7 \times 6) \div (3 \times 2 \times 1) = 336 \div 6 = 56$.
- (1 pt) Pascal : $C(9 ; 4) = C(8 ; 3) + C(8 ; 4) = 56 + 70 = 126$. Par symétrie, $C(9 ; 5) = C(9 ; 4) = 126$.

4 Ampoules défectueuses / 5 pts

Calculatrice autorisée.

- (1 pt) Chaque ampoule est une épreuve de Bernoulli (succès « défectueuse », $p = 0,1$) ; les 12 prélèvements sont identiques et indépendants : X suit $B(12 ; 0,1)$.
- (1,5 pt) $P(X = 0) = 0,9^{12} \approx 0,282$; $P(X = 2) = C(12 ; 2) \times 0,1^2 \times 0,9^{10} = 66 \times 0,01 \times 0,3487 \approx 0,230$.
- (1 pt) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{12} \approx 0,718$.
- (1,5 pt) $E(X) = 12 \times 0,1 = 1,2$; $V(X) = 12 \times 0,1 \times 0,9 = 1,08$; $\sigma(X) = \sqrt{1,08} \approx$

1,04.

5 Un jeu de dé / 3 pts

- a. (1 pt) Les lancers sont identiques et indépendants, succès « 6 » avec $p = \mathbf{1/6}$: X suit $B(4 ; \mathbf{1/6})$ et $E(X) = 4 \times \mathbf{1/6} = \mathbf{2/3}$.
- b. (1 pt) $G = 6X - 3$, donc $E(G) = 6 \times \mathbf{2/3} - 3 = 4 - 3 = 1 \text{ €}$.
- c. (1 pt) $E(G) = 1 > 0$: le jeu est favorable ; en jouant un très grand nombre de parties, le joueur gagne en moyenne 1 € par partie.

6 Simulation en Python / 2 pts

- a. (1 pt) Elle simule une variable X de loi $B(20 ; 0,3)$ (nombre de succès sur 20 épreuves). En moyenne : $E(X) = 20 \times 0,3 = 6$.
- b. (1 pt) On compte les fois où le résultat est supérieur ou égal à 1 (≥ 1) ; on divise par N . Le résultat est proche de $1 - 0,7^{20} \approx 0,9992$.