

Variables aléatoires et loi binomiale

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Trois lancers de pièce ★★★

- a. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3.
 b. Il y a $2^3 = 8$ issues équiprobables ; le nombre d'issues à k Pile est $C(3 ; k) = 1, 3, 3, 1$.

k	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

- c. $P(X \geq 2) = 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2$.
 d. $E(X) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 12/8 = 3/2 = 1,5$.

2 Une probabilité manquante ★★★

La somme des probabilités vaut 1 : $0,1 + a + 0,3 + 0,2 = 1$, donc $a = 1 - 0,6 = 0,4$.

$E(X) = (-2) \times 0,1 + 0 \times 0,4 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = -0,2 + 0 + 0,3 + 0,8 = 0,9$.

3 La roue de la fortune ★★★

- a. G vaut $10 - 2 = 8$ (probabilité **1/8**), $3 - 2 = 1$ (probabilité **2/8 = 1/4**) ou -2 (probabilité **5/8**).

g	-2	1	8
$P(G = g)$	5/8	1/4	1/8

- b. $E(G) = (-2) \times 5/8 + 1 \times 2/8 + 8 \times 1/8 = (-10 + 2 + 8) \div 8 = 0$. L'espérance est nulle : le jeu est équitable.

4 Bernoulli ou pas ? ★★★

- a. Oui : deux issues (6 ou pas 6), $p = 1/6$.
 b. Non : il y a six issues (les six faces), pas deux.
 c. Oui : le succès est « la carte est un roi » ; il y a 4 rois sur 32 cartes, donc $p = 4/32 = 1/8$.
 d. Non : l'âge peut prendre plus de deux valeurs ; ce n'est pas une épreuve à deux

issues (on pourrait en faire une en définissant un succès, par exemple « avoir 16 ans »).

5 Coefficients binomiaux ★★★

$C(6 ; 0) = 1 ; C(7 ; 6) = C(7 ; 1) = 7 ; C(5 ; 2) = 5! \div (2! \times 3!) = 120 \div 12 = 10 ; C(8 ; 3) = (8 \times 7 \times 6) \div (3 \times 2 \times 1) = 56 ; C(10 ; 8) = C(10 ; 2) = (10 \times 9) \div 2 = 45.$

Pascal : $C(6 ; 2) + C(6 ; 3) = 15 + 20 = 35 = C(7 ; 3) = 35.$ ✓

6 Vrai ou faux : loi binomiale ? ★★★

- a. Oui : 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, succès « Face » de probabilité 0,5. X suit $B(10 ; 0,5)$.
- b. Non : sans remise, la composition de l'urne change à chaque tirage ; les épreuves ne sont pas indépendantes.
- c. Oui : avec remise, les tirages sont identiques et indépendants, $p = \mathbf{5/10} = 0,5$. X suit $B(3 ; 0,5)$.
- d. Non : le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance.

7 Quatre tirs à l'arc ★★★

X suit $B(4 ; \mathbf{1/4})$. $P(X = k) = C(4 ; k) \times (\mathbf{1/4})^k \times (\mathbf{3/4})^{4-k} = C(4 ; k) \times 3^{4-k} \div 256.$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	81/256	27/64	27/128	3/64	1/256

$P(X = 0) = \mathbf{81/256}$ et $P(X = 2) = \mathbf{54/256} = \mathbf{27/128}.$

8 Variance et écart-type ★★★

$E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = 0,4 + 0,6 + 1 + 1 = 3.$

Définition : $V(X) = 0,4 \times (1 - 3)^2 + 0,3 \times (2 - 3)^2 + 0,2 \times (5 - 3)^2 + 0,1 \times (10 - 3)^2 = 1,6 + 0,3 + 0,8 + 4,9 = 7,6.$

König-Huygens : $E(X^2) = 0,4 \times 1 + 0,3 \times 4 + 0,2 \times 25 + 0,1 \times 100 = 16,6$, donc $V(X) = 16,6 - 3^2 = 7,6.$ ✓

$\sigma(X) = \sqrt{7,6} \approx 2,76.$

9 Transformation affine ★★★

$$E(Y) = 3 E(X) - 2 = 3 \times 3 - 2 = 7.$$

$$V(Y) = 3^2 \times V(X) = 9 \times 7,6 = 68,4.$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{68,4} = 3 \sigma(X) \approx 8,27.$$

Remarque : retrancher 2 n'a aucun effet sur la variance.

10 Loi complète de B(6 ; 0,4) ★★★

a. $P(X = k) = C(6 ; k) \times 0,4^k \times 0,6^{6-k}.$

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

b. Somme des valeurs arrondies : 1,000 ; la somme exacte vaut 1.

c. Avec la définition : $E(X) = \sum k P(X = k) = 2,40$; avec la formule, $E(X) = 6 \times 0,4 = 2,4$. Les deux concordent.

d. $V(X) = 6 \times 0,4 \times 0,6 = 1,44.$

11 Boules rouges avec remise ★★★

a. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli (succès « rouge », $p = \mathbf{3/10} = 0,3$), les 5 tirages avec remise sont identiques et indépendants : X suit B(5 ; 0,3).

b. $P(X = 2) = C(5 ; 2) \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 10 \times 0,09 \times 0,343 = 0,309.$

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7^5 = 1 - 0,16807 = 0,83193.$

d. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 5 \times 0,3^4 \times 0,7 + 0,3^5 = 0,02835 + 0,00243 = 0,03078.$

12 Les fléchettes ★★★

a. X suit B(8 ; 0,6).

b. $P(X = 5) = C(8 ; 5) \times 0,6^5 \times 0,4^3 = 56 \times 0,07776 \times 0,064 \approx 0,279.$

c. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,0007 + 0,0079 + 0,0413 \approx 0,050.$

d. $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) \approx 0,0896 + 0,0168 \approx 0,106.$

13 Un questionnaire au hasard ★★★

a. Chaque réponse est une épreuve de Bernoulli de succès « bonne réponse », $p = 0,25$; les réponses au hasard sont indépendantes. X suit B(10 ; 0,25).

b. $P(X = 3) = C(10 ; 3) \times 0,25^3 \times 0,75^7 = 120 \times 0,015625 \times 0,13348 \approx 0,250.$

c. $P(X \geq 1) = 1 - 0,75^{10} \approx 1 - 0,0563 \approx 0,944.$

d. $E(X) = 10 \times 0,25 = 2,5$ bonnes réponses.

14 Arbre et fractions exactes ★★★

- a. $P(\text{SÉS}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.
- b. $C(3; 2) = 3$ listes (SSÉ, SÉS, ÉSS), chacune de probabilité $\frac{2}{27}$: $P(X = 2) = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

- c. Somme : $(8 + 12 + 6 + 1) \div 27 = 27 \div 27 = 1$. ✓

15 Un jeu de pile ou face truqué ★★★

- a. X suit $B(5; 0,4)$.
- b. $G = 3X - 5$.
- c. $E(X) = 5 \times 0,4 = 2$ et $V(X) = 5 \times 0,4 \times 0,6 = 1,2$. Donc $E(G) = 3 \times 2 - 5 = 1$ € et $V(G) = 3^2 \times 1,2 = 10,8$. L'espérance est positive : en moyenne, le joueur gagne 1 € par partie ; le jeu lui est favorable.

16 Combien de répétitions ? ★★★

Soit X le nombre de succès : X suit $B(n; 0,2)$ et $P(X \geq 1) = 1 - 0,8^n$. On cherche n tel que $1 - 0,8^n \geq 0,99$, soit $0,8^n \leq 0,01$.

À la calculatrice : $0,8^{20} \approx 0,01153 > 0,01$, tandis que $0,8^{21} \approx 0,00922 \leq 0,01$. Comme $0,8^n$ décroît quand n augmente, le plus petit entier est **n = 21**.

17 Contrôle qualité ★★★

- a. X suit $B(50; 0,04)$. $E(X) = 50 \times 0,04 = 2$; $V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = 1,92$; $\sigma(X) = \sqrt{1,92} \approx 1,39$.
- b. $P(X = 0) = 0,96^{50} \approx 0,130$. $P(X = 1) \approx 0,271$, $P(X = 2) \approx 0,276$, donc $P(X \leq 2) \approx 0,677$.
- c. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,323$. Une alerte survient environ 32 % du temps : elle n'est pas rare.

18 Lire et compléter un programme ★★★

- a. `loi(4, 0.5, 2)` calcule $P(X = 2)$ pour $X \sim B(4; 0,5)$: $C(4; 2) \times 0,5^2 \times 0,5^2 = 6 \times 0,0625 = 0,375$.
- b. `esperance(n, p)` calcule $\sum k \times P(X = k)$, c'est-à-dire $E(X)$. On attend `n p = 4 x 0,5 = 2` (Python peut afficher 2.0).
- c. Par l'événement contraire :

```
def au_moins_un(n, p):  
    return 1 - loi(n, p, 0)
```

Par exemple, $\text{au_moins_un}(4, 0.5)$ vaut $1 - 0,5^4 = 0,9375$.

19 Une preuve de la relation de Pascal ★★★

- a. $C(6; 2) + C(6; 3) = 15 + 20 = 35$ et $C(7; 3) = 35$. ✓
- b. $C(n; k) = n! \div (k! (n - k)!)$ et $C(n; k + 1) = n! \div ((k + 1)! (n - k - 1)!)$. On les met sur le même dénominateur $(k + 1)! (n - k)!$, en utilisant $(k + 1)! = (k + 1) \times k!$ et $(n - k)! = (n - k) \times (n - k - 1)!$: la première fraction est multipliée en haut et en bas par $(k + 1)$, la seconde par $(n - k)$. La somme vaut $n! \times [(k + 1) + (n - k)] \div ((k + 1)! (n - k)!) = n! \times (n + 1) \div ((k + 1)! (n - k)!) = (n + 1)! \div ((k + 1)! (n - k - 1)!)$. Or $(n + 1) - (k + 1) = n - k$: c'est exactement $C(n + 1; k + 1)$. ■

20 La surréservation ★★★

- a. X suit $B(52; 0,92)$.
- b. $E(X) = 52 \times 0,92 = 47,84$; $V(X) = 52 \times 0,92 \times 0,08 = 3,8272$; $\sigma(X) \approx 1,96$.
- c. $P(X \geq 51) = P(X = 51) + P(X = 52) = 52 \times 0,92^{51} \times 0,08 + 0,92^{52} \approx 0,0592 + 0,0131 \approx 0,072$. Il y a donc environ 7 % de risque de devoir refuser au moins un passager.

21 Retrouver n et p ★★★

On a $np = 12$ et $np(1 - p) = 7,2$. En remplaçant np par 12 dans la seconde égalité : $12(1 - p) = 7,2$, donc $1 - p = 0,6$ et $p = 0,4$. Alors $n = 12 \div 0,4 = 30$.

Vérification : $30 \times 0,4 = 12$ et $30 \times 0,4 \times 0,6 = 7,2$. ✓ X suit $B(30; 0,4)$.

22 Une pièce est-elle truquée ? ★★★

- a. À la calculatrice (binomFRép) : $P(X \leq 5) \approx 0,0207 \leq 0,025$ et $P(X \leq 6) \approx 0,0577 > 0,025$. Donc $a = 6$.
- b. $P(X \leq 13) \approx 0,9423 < 0,975$ et $P(X \leq 14) \approx 0,9793 \geq 0,975$. Donc $b = 14$.
- c. L'intervalle est $[6; 14]$. Comme $16 > 14$, le résultat sort de l'intervalle : il a moins de 5 % de chances de se produire avec une pièce équilibrée. On peut raisonnablement soupçonner la pièce d'être truquée (sans en être certain).