

Variables aléatoires et loi binomiale

Cours de maths - 1ère

Combien de tirs réussis sur dix lancers francs ? Combien de pièces défectueuses dans un lot ? Combien de bonnes réponses en répondant au hasard à un questionnaire ? Dans tous ces cas, un **nombre** dépend du hasard. Dans ce chapitre, tu apprends à décrire un tel nombre (variable aléatoire, loi, espérance, variance), puis tu rencontres le modèle le plus utile des probabilités du lycée : la **loi binomiale**. Mathbot t'attend pour les calculs !

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

Rappel : une expérience aléatoire a un ensemble d'issues, noté Ω . Une probabilité P associe à chaque événement un nombre entre 0 et 1.

Variable aléatoire réelle

Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui associe à chaque issue un **nombre réel**. L'événement « $X = x$ » est l'ensemble des issues auxquelles X associe le nombre x ; on note sa probabilité $P(X = x)$.

Loi de probabilité

Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_r$, la **loi de probabilité** de X est la donnée des nombres $P(X = x_i)$, en général dans un tableau. Ces probabilités sont comprises entre 0 et 1 et leur **somme vaut 1**.

Exemple : un jeu de dé

On lance un dé équilibré à six faces. Sur un 6, on gagne 8 € ; sur un 4 ou un 5, on gagne 2 € ; sur 1, 2 ou 3, on perd 3 €. Le gain X est une variable aléatoire.

x_i	-3	2	8
$P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

Vérification : **1/2 + 1/3 + 1/6 = 1**. On calcule par exemple $P(X \geq 2) = \mathbf{1/3 + 1/6 = 1/2}$.

Piège

« $X = 2$ » est un événement, pas une probabilité : on écrit $P(X = 2)$. Et deux issues différentes peuvent donner la même valeur de X : leurs probabilités s'additionnent.

2. Espérance, variance et écart-type

Espérance

L'**espérance** de X est le nombre $E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_r P(X = x_r)$. C'est la valeur moyenne de X si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

Variance et écart-type

La **variance** est $V(X) = \sum P(X = x_i) (x_i - E(X))^2$, c'est-à-dire la moyenne des carrés des écarts à l'espérance. L'**écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Plus il est grand, plus les valeurs de X sont dispersées.

Formule de König-Huygens

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, où $E(X^2) = \sum P(X = x_i) x_i^2$.

Démonstration. Avec $m = E(X)$, on développe $(x_i - m)^2 = x_i^2 - 2m x_i + m^2$. Donc $V(X) = \sum P(X = x_i) x_i^2 - 2m \sum P(X = x_i) x_i + m^2 \sum P(X = x_i) = E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2$.

Suite du jeu de dé

$E(X) = (-3) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{6} = -\frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{8}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$. En moyenne, on gagne 0,5 € par partie.

$E(X^2) = 9 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 64 \times \frac{1}{6} = \frac{99}{6} = 16,5$, donc $V(X) = 16,5 - 0,25 = 16,25$ et $\sigma(X) = \sqrt{16,25} \approx 4,03$ €.

Transformation affine

Pour tous réels a et b : $E(aX + b) = a E(X) + b$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Astuce

Ajouter b décale toutes les valeurs : la moyenne bouge, mais pas la dispersion.

Multiplier par a étire les écarts : la variance est multipliée par a^2 . Si on double les gains

($Y = 2X$), la moyenne double mais la variance est multipliée par 4.

Jeu équitable

Un jeu où X est le gain algébrique (gain moins mise) est **équitable** quand $E(X) = 0$.

3. Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Épreuve et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues seulement** : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $\bar{S}$, de probabilité $q = 1 - p$. La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** .

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Espérance et variance

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p : **$E(X) = p$** et **$V(X) = p(1 - p)$** .

Démonstration. $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$. $E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$, donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

Exemple

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes ; le succès est « obtenir un cœur ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 8/32 = 1/4$. Un lancer de dé où l'on note la face (six issues) n'en est pas une, mais « obtenir un 6 ou non » en est une, avec $p = 1/6$.

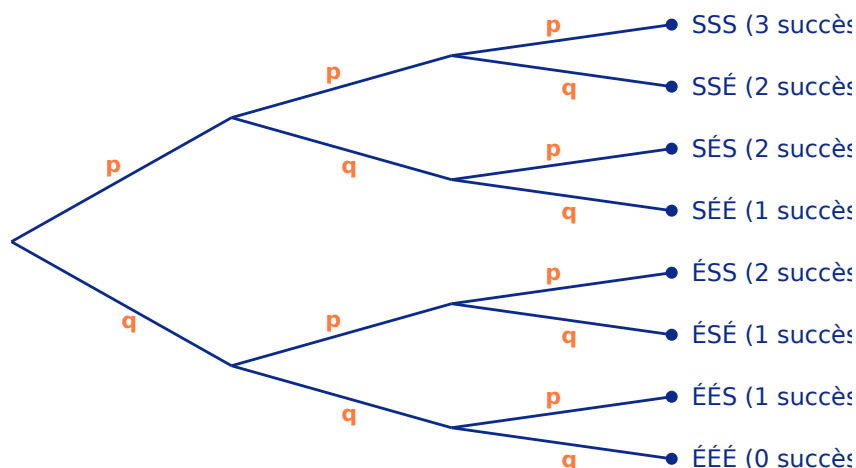
4. Schéma de Bernoulli

Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de **n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**, chacune de probabilité de succès p . Un résultat est une liste de n issues, par exemple SÉS pour $n = 3$.

L'indépendance permet de **multiplier** les probabilités le long d'une branche de l'arbre.
Fiche en ligne : maths-facile.eu/variables-aleatoires-et-loi-binomiale-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

Voici l'arbre pour $n = 3$ (p sur les branches « succès », $q = 1 - p$ sur les branches « échec »).



Exemple

Pour $p = 0,4$ et $n = 3$, la probabilité de SÉS est $0,4 \times 0,6 \times 0,4 = 0,096$. Les listes SSÉ, SÉS et ESS ont chacune **deux succès** et la même probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$. La probabilité d'avoir exactement deux succès est donc $3 \times 0,096 = 0,288$.

Le nombre de chemins de l'arbre qui contiennent exactement k succès joue donc un rôle essentiel : il faut apprendre à le calculer.

5. Coefficients binomiaux

Coefficient binomial

Pour $0 \leq k \leq n$, le **coefficient binomial** « k parmi n », noté $C(n ; k)$, est le **nombre de chemins** de l'arbre de n répétitions qui réalisent exactement k succès. (Dans les manuels, il se note aussi avec n au-dessus de k entre grandes parenthèses.)

Propriétés

- $C(n ; 0) = C(n ; n) = 1$ (un seul chemin : que des échecs, ou que des succès) ;
- $C(n ; 1) = C(n ; n - 1) = n$;
- **Symétrie** : $C(n ; k) = C(n ; n - k)$;
- **Relation de Pascal** : $C(n ; k) + C(n ; k + 1) = C(n + 1 ; k + 1)$;
- $C(n ; 0) + C(n ; 1) + \dots + C(n ; n) = 2^n$ (nombre total de chemins).

Justification de Pascal. Parmi les chemins de $n + 1$ épreuves ayant $k + 1$ succès, regarde la dernière épreuve. Si c'est un échec, les n premières épreuves ont $k + 1$ succès : $C(n ; k + 1)$ chemins. Si c'est un succès, les n premières ont k succès : $C(n ; k)$ chemins. On

additionne.

La relation de Pascal fournit le **triangle de Pascal** : chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Calculer $C(n ; k)$

- Avec la calculatrice : touche **nCr** (ou « Combinaison »), on saisit n puis k .
- À la main, pour les petites valeurs : triangle de Pascal, ou la formule $C(n ; k) = n! \div (k! (n - k)!)$, où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et $0! = 1$.

Exemple

$C(7 ; 3) = 7! \div (3! \times 4!) = 5040 \div (6 \times 24) = 35$. On vérifie avec Pascal : $C(6 ; 2) + C(6 ; 3) = 15 + 20 = 35$. Par symétrie, $C(7 ; 4) = 35$.

6. La loi binomiale

Loi binomiale

On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p . La variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée **$B(n ; p)$** .

Formule

Si X suit $B(n ; p)$, alors pour tout entier k de 0 à n :

$$P(X = k) = C(n ; k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration. Un chemin de l'arbre qui contient k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$ (produit le long de la branche). Il y a $C(n ; k)$ tels chemins, tous

Fiche en ligne : maths-facile.eu/variables-aleatoires-et-loi-binomiale-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

incompatibles : on additionne leurs probabilités.

Reconnaître et utiliser une loi binomiale

1. Repère l'épreuve de Bernoulli et définis le succès ; donne p .
2. Vérifie que les n répétitions sont **identiques** et **indépendantes** (tirage avec remise, lancers...) ; n est fixé à l'avance.
3. Conclut : « X suit la loi binomiale $B(n ; p)$ » et applique la formule.

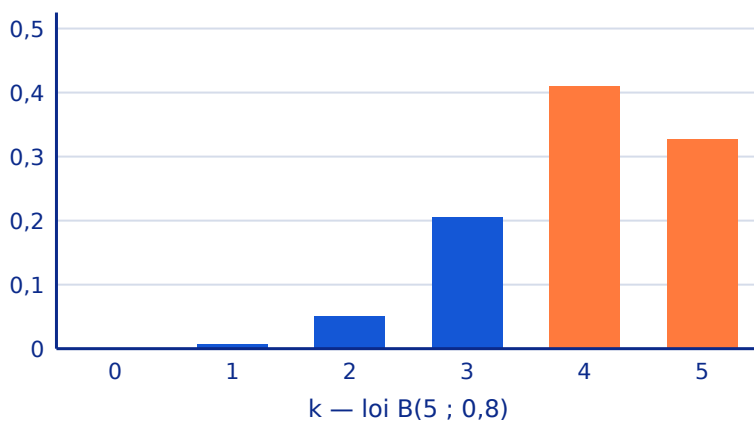
Exemple : les lancers francs

Une basketteuse réussit un lancer franc avec la probabilité 0,8. Elle en tente 5, indépendamment. Le nombre X de paniers suit $B(5 ; 0,8)$.

$$P(X = 3) = C(5 ; 3) \times 0,8^3 \times 0,2^2 = 10 \times 0,512 \times 0,04 = 0,205.$$

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,000	0,006	0,051	0,205	0,410	0,328

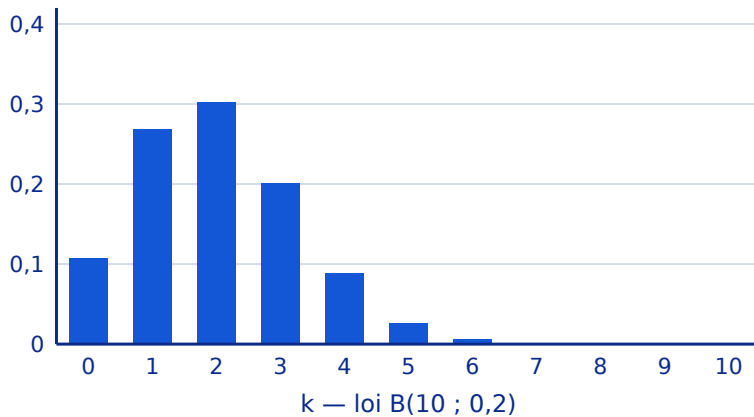
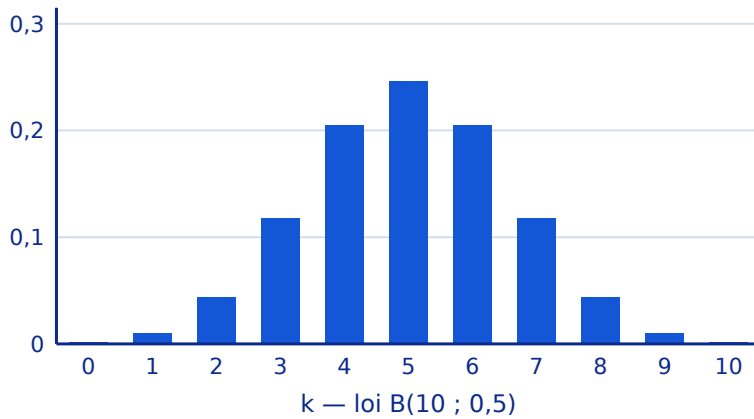
$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,410 + 0,328 = 0,737.$$



Piège

Un tirage **sans remise** dans une urne n'est pas une répétition indépendante : le nombre de boules rouges tirées ne suit pas une loi binomiale. De même, « lancer jusqu'à obtenir un 6 » n'est pas binomial : le nombre d'épreuves n'est pas fixé.

La forme du diagramme dépend de p : symétrique pour $p = 0,5$, penchée à gauche pour un petit p , à droite pour un grand p .



7. Espérance et variance de la loi binomiale

Espérance, variance, écart-type

Si X suit $B(n ; p)$, alors **$E(X) = n p$** , **$V(X) = n p (1 - p)$** et $\sigma(X) = \sqrt{n p (1 - p)}$.

Idée : X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, chacune d'espérance p et de variance $p(1 - p)$; les espérances s'additionnent toujours, et les variances aussi lorsque les variables sont indépendantes (propriété admise).

Exemple

Pour $B(5 ; 0,8)$: $E(X) = 5 \times 0,8 = 4$ paniers, $V(X) = 5 \times 0,8 \times 0,2 = 0,8$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,8} \approx 0,89$. Sur un grand nombre de séries de 5 lancers, la basketteuse marque en moyenne 4 paniers par série.

Astuce

Vérifie la cohérence : $E(X) = n p$ doit se trouver au centre de la « bosse » du diagramme en bâtons, et $\sigma(X)$ mesure la largeur de cette bosse.

8. Calculs de probabilités avec la loi binomiale

Événements usuels

- **$P(X \geq a)$ ou $P(X \leq a)$** : somme de probabilités élémentaires ; si c'est plus court, passe par l'événement contraire : $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a - 1)$.
- « **Au moins un succès** » : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.
- Avec la calculatrice : « binomFdp » (ou BinomialPD) donne $P(X = k)$; « binomFRép » (ou BinomialCD) donne $P(X \leq k)$.

Exemple

Une machine fabrique des pièces dont 4 % sont défectueuses ; on prélève 30 pièces (assimilé à un tirage avec remise). X suit $B(30 ; 0,04)$. $P(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0,96^{30} \approx 0,706$.

Trouver le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq s$

On résout $1 - (1 - p)^n \geq s$, soit $(1 - p)^n \leq 1 - s$. On teste des valeurs de n avec la calculatrice (tableau de valeurs, ou programme Python) jusqu'à franchir le seuil.

Exemple : pour $p = 0,1$ et $s = 0,9$, on trouve $n = 22$ car $0,9^{22} \approx 0,098 \leq 0,1$ alors que $0,9^{21} \approx 0,109 > 0,1$.

9. Simulation avec Python

On peut **simuler** une loi binomiale : on répète l'expérience un grand nombre de fois et on observe la moyenne des résultats, qui se rapproche de l'espérance.

```
import random

def bernoulli(p):
    if random.random() < p:
        return 1      # succès
    return 0          # échec

def binomiale(n, p):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + bernoulli(p)
    return s
```

```
def moyenne(n, p, N):
    total = 0
    for i in range(N):
        total = total + binomiale(n, p)
    return total / N

print(moyenne(10, 0.3, 10000))
```

`random.random()` renvoie un nombre « au hasard » entre 0 et 1 ; la condition `random.random() < p` est vraie avec la probabilité p . Le programme affiche une valeur proche de $np = 10 \times 0,3 = 3$; elle change à chaque exécution, mais s'en approche d'autant mieux que N est grand.

Astuce de Mathbot

Pour calculer exactement $P(X = k)$, utilise `from math import comb` puis `comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)`.

À retenir

- Une variable aléatoire associe un réel à chaque issue ; sa loi est le tableau des $P(X = x_i)$, de somme 1.
- $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$; $V(X) = \sum P(X = x_i)(x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- $E(aX + b) = a E(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Épreuve de Bernoulli : deux issues, succès de probabilité p . Loi de Bernoulli : $E = p$, $V = p(1 - p)$.
- Schéma de Bernoulli : n épreuves identiques et indépendantes ; on multiplie le long d'une branche.
- $C(n ; k)$ = nombre de chemins à k succès ; $C(n ; k) = C(n ; n - k)$; relation de Pascal ; formule $n! \div (k! (n - k)!)$.
- X suit $B(n ; p)$: $P(X = k) = C(n ; k) p^k (1 - p)^{n - k}$.
- $E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p)$; $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$.
- Avant d'écrire « loi binomiale », justifie : deux issues, probabilité constante, répétitions indépendantes, n fixé.