

Variables aléatoires et loi binomiale

Exercices de maths - 1ère

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Trois lancers de pièce ★★★

On lance trois fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de « Pile » obtenus.

- Quelles valeurs X peut-elle prendre ?
- Donne la loi de probabilité de X (tableau).
- Calcule $P(X \geq 2)$.
- Calcule $E(X)$.

2 Une probabilité manquante ★★★

Une variable aléatoire X a pour loi :

x_i	-2	0	1	4
$P(X = x_i)$	0,1	a	0,3	0,2

Détermine a , puis calcule $E(X)$.

3 La roue de la fortune ★★★

Une roue est partagée en 8 secteurs égaux : 1 secteur rapporte 10 €, 2 secteurs rapportent 3 €, les 5 autres ne rapportent rien. Participer coûte 2 €. Soit G le gain algébrique (gain moins mise).

- Donne la loi de G .
- Calcule $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?

4 Bernoulli ou pas ? ★★★

Dans chaque cas, dis s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. Si oui, précise le succès et p .

- On lance un dé équilibré ; le succès est « obtenir un 6 ».
- On lance un dé équilibré et on note le numéro de la face.

- c. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes ; on regarde si c'est un roi.
- d. On interroge un élève de la classe sur son âge.

5 Coefficients binomiaux ★★★

Calcule : $C(6 ; 0)$, $C(7 ; 6)$, $C(5 ; 2)$, $C(8 ; 3)$, $C(10 ; 8)$. Puis vérifie la relation de Pascal pour $n = 6$ et $k = 2$.

6 Vrai ou faux : loi binomiale ? ★★★

Dans chaque situation, X suit-elle une loi binomiale ? Justifie et donne les paramètres si c'est le cas.

- a. On lance 10 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de Face.
- b. Une urne contient 5 boules rouges et 5 noires ; on tire 3 boules **sans remise** ; X est le nombre de boules rouges.
- c. Même urne, mais on tire 3 boules **avec remise** ; X est le nombre de boules rouges.
- d. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6 ; X est le nombre de lancers.

7 Quatre tirs à l'arc ★★★

Un archer atteint sa cible avec la probabilité $\frac{1}{4}$ à chaque tir, indépendamment des autres. Il tire 4 flèches. Soit X le nombre de cibles atteintes. Donne la loi de X en fractions, puis calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.

8 Variance et écart-type ★★★

X a pour loi :

x_i	1	2	5	10
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

Calcule $E(X)$, $V(X)$ (avec deux méthodes) et $\sigma(X)$ arrondi au centième.

9 Transformation affine ★★★

On reprend la variable X de l'exercice précédent ($E(X) = 3$ et $V(X) = 7,6$). Soit $Y = 3X - 2$. Calcule $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondi au centième).

10 Loi complète de $B(6 ; 0,4)$ ★★★

X suit la loi binomiale $B(6 ; 0,4)$.

- Calcule $P(X = k)$ pour k de 0 à 6 (arrondis au millièmè).
- Vérifie que la somme vaut environ 1.
- Calcule $E(X)$ avec la définition de l'espérance, puis avec np .
- Calcule $V(X)$.

11 Boules rouges avec remise ★★★

Un sac contient 3 boules rouges et 7 boules vertes. On tire une boule, on regarde sa couleur et on la remet ; on répète cela 5 fois. Soit X le nombre de boules rouges obtenues.

- Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.
- Calcule $P(X = 2)$ (arrondi au millièmè).
- Calcule $P(X \geq 1)$.
- Calcule $P(X \geq 4)$.

12 Les fléchettes ★★★

Un joueur atteint le centre d'une cible avec la probabilité 0,6 à chaque lancer, indépendamment. Il lance 8 fléchettes. X est le nombre de centres atteints.

- Donne la loi de X .
- Calcule $P(X = 5)$.
- Calcule $P(X \leq 2)$.
- Calcule $P(X \geq 7)$.

13 Un questionnaire au hasard ★★★

Un questionnaire comporte 10 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule est exacte. Léo répond au hasard à toutes les questions. X est le nombre de bonnes réponses.

- Quelle est la loi de X ? Justifie.
- Calcule $P(X = 3)$.
- Calcule la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse.
- Quel est le nombre moyen de bonnes réponses ?

14 Arbre et fractions exactes ★★★

On répète 3 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{1}{3}$. X est le nombre de succès.

- Calcule la probabilité de la liste SÉS.
- Combien de listes contiennent exactement deux succès ? Donne $P(X = 2)$.
- Donne toute la loi de X sous forme de fractions et vérifie que la somme vaut 1.

15 Un jeu de pile ou face truqué ★★★

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité 0,4. Pour jouer, on mise 5 €. On lance la pièce 5 fois ; chaque Pile rapporte 3 €. Soit X le nombre de Pile et G le gain algébrique.

- Quelle est la loi de X ?
- Exprime G en fonction de X .
- Calcule $E(G)$ et $V(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

16 Combien de répétitions ? ★★★

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,2. Quel est le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure ou égale à 0,99 ?

17 Contrôle qualité ★★★

Dans une usine, 4 % des pièces sont défectueuses. On prélève 50 pièces au hasard (on assimile à un tirage avec remise). X est le nombre de pièces défectueuses.

- Donne la loi de X , son espérance et son écart-type (arrondi au centième).
- Calcule $P(X = 0)$ puis $P(X \leq 2)$ (arrondis au millième).
- Calcule $P(X \geq 3)$. L'atelier déclenche une alerte s'il y a au moins 3 pièces défectueuses ; l'alerte est-elle fréquente ?

18 Lire et compléter un programme ★★★

On considère le programme :

```
from math import comb

def loi(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
```

```
def esperance(n, p):
    s = 0
    for k in range(n + 1):
        s = s + k * loi(n, p, k)
    return s
```

- Que calcule $\text{loi}(4, 0.5, 2)$? Donne sa valeur.
- Que calcule $\text{esperance}(4, 0.5)$? Quelle valeur attend-on ?
- Écris une fonction $\text{au_moins_un}(n, p)$ qui renvoie $P(X \geq 1)$ en utilisant loi .

19 Une preuve de la relation de Pascal ★★★

Soit n et k deux entiers avec $0 \leq k \leq n - 1$.

- Vérifie la relation $C(n ; k) + C(n ; k + 1) = C(n + 1 ; k + 1)$ pour $n = 6$ et $k = 2$.
- Démontre-la à l'aide de la formule $C(n ; k) = n! \div (k! (n - k)!)$.

20 La surréservation ★★★

Une compagnie vend 52 billets pour un vol de 50 places. Chaque passager vendu se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,92, indépendamment des autres. X est le nombre de passagers présents.

- Quelle est la loi de X ?
- Calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).
- Quelle est la probabilité que des passagers se voient refuser l'embarquement, c'est-à-dire que $X \geq 51$? (arrondi au millièmè)

21 Retrouver n et p ★★★

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(n ; p)$ d'espérance 12 et de variance 7,2. Détermine n et p .

22 Une pièce est-elle truquée ? ★★★

On lance 20 fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de Pile. X suit $B(20 ; 0,5)$.

- Détermine le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$.
- Détermine le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.
- Un élève obtient 16 Pile sur 20 lancers. Que peut-il en penser, si on suit la règle « on soupçonne la pièce d'être truquée quand le résultat sort de l'intervalle $[a ; b]$ » ?