

Variations et extremums

Corrigé du contrôle - 2de

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Lecture sur une courbe / 4 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt ; d) 1 pt.

a. (1 pt)

x	0		1		3		4
w(x)	0	↗	4	↘	0	↗	4

b. (1 pt) Maximum **4**, atteint en $x = 1$ et en $x = 4$. Minimum **0**, atteint en $x = 0$ et en $x = 3$.

c. (1 pt) $w(x) = 2$: 2 est entre 0 et 4 sur chacun des trois intervalles de monotonie : **3 solutions**. $w(x) = 5$: $5 > 4 = \text{maximum}$: **aucune solution**.

d. (1 pt) $1 \leq 1,5 < 2,5 \leq 3$ et w est décroissante sur $[1 ; 3]$, donc $w(1,5) > w(2,5)$.

2 Comparer sans calculatrice / 3 pts

Barème : 1 pt par question. (Calculatrice interdite.)

a. $-5,1 < -4,9 \leq 0$ et le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$: $(-5,1)^2 > (-4,9)^2$.

b. $-0,7 < -0,4 < 0$ et l'inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$: **$1/-0,7 > 1/-0,4$** ($-1,43... > -2,5$).

c. $(\sqrt{3})^2 = 3 > 1,7^2 = 2,89$ donc $\sqrt{3} > 1,7$, d'où $-\sqrt{3} < -1,7$. f est affine de coefficient $-4 < 0$, donc décroissante : $f(-\sqrt{3}) > f(-1,7)$.

3 Tableau de variations donné / 4 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt ; d) 1 pt.

a. f est **croissante** sur $[-6 ; -2]$ et sur $[1 ; 5]$; **décroissante** sur $[-2 ; 1]$.

b. Maximum **6**, atteint en $x = 5$. Minimum **-3**, atteint en $x = -6$.

c. f est décroissante sur $[-2 ; 1]$: $f(1) \leq f(x) \leq f(-2)$, donc **$-2 \leq f(x) \leq 4$** .

d. (0,5 pt) $-4 < -3$ dans $[-6 ; -2]$ où f est croissante : $f(-4) < f(-3)$. (0,5 pt) $f(0)$ est compris entre -2 et 4 ; $f(3)$ est compris entre -2 et 6 : ces plages se chevauchent, on **ne peut pas** comparer avec le tableau seul (0 est dans la zone décroissante, 3 dans la zone croissante).

4 Une parabole renversée / 4 pts

Barème : a) 2 pts ; b) 1 pt ; c) 1 pt.

- a. (1 pt) Soient $0 \leq a < b \leq 3$. Alors $3 - a > 3 - b \geq 0$. Le carré est croissant sur $[0 ; +\infty[: (3 - a)^2 > (3 - b)^2$, c'est-à-dire $(a - 3)^2 > (b - 3)^2$. En multipliant par $-2 < 0$, on renverse : $-2(a - 3)^2 < -2(b - 3)^2$, puis $f(a) < f(b) : f$ est croissante sur $[0 ; 3]$. Un raisonnement analogue donne f décroissante sur $[3 ; 5]$. (1 pt) $f(0) = -18 + 8 = -10 ; f(3) = 8 ; f(5) = -8 + 8 = 0 :$

x	0		3		5
f(x)	-10	↗	8	↘	0

- b. (1 pt) Maximum **8**, atteint en $x = 3$; minimum **-10**, atteint en $x = 0$.
c. (1 pt) $f(x) \geq 6 \Leftrightarrow -2(x - 3)^2 \geq -2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$.
Cet intervalle est dans $[0 ; 5] : S = [2 ; 4]$.

5 Problème : l'enclos contre un mur / 5 pts

Barème : a) 1,5 pt ; b) 1 pt ; c) 1,5 pt ; d) 1 pt.

- a. (1,5 pt) Le grillage sert pour deux côtés de longueur x et un côté de longueur $60 - 2x$ (côté parallèle au mur). Il faut $60 - 2x \geq 0$ donc $x \leq 30 : x \in [0 ; 30]$. L'aire est $A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$.
b. (1 pt) $450 - 2(x - 15)^2 = 450 - 2(x^2 - 30x + 225) = 450 - 2x^2 + 60x - 450 = -2x^2 + 60x$. ✓
c. (1,5 pt) $A(0) = 0 ; A(15) = 450 ; A(30) = -1\,800 + 1\,800 = 0$. A est croissante sur $[0 ; 15]$ et décroissante sur $[15 ; 30]$ (car $(x - 15)^2$ décroît puis croît et il est multiplié par -2) :

x	0		15		30
A(x)	0	↗	450	↘	0

L'aire maximale est **450 m²**, atteinte pour $x = 15$: les côtés perpendiculaires au mur mesurent 15 m et le côté parallèle $60 - 30 = \mathbf{30\ m}$.

- d. (1 pt) $A(x) \geq 400 \Leftrightarrow 450 - 2(x - 15)^2 \geq 400 \Leftrightarrow (x - 15)^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x - 15 \leq 5 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 20$. L'aire est d'au moins 400 m² pour $x \in [10 ; 20]$.