

Variations et extremums

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lire les variations sur une courbe ★★★

- a. La courbe monte de l'abscisse -2 à l'abscisse 1 , puis descend jusqu'à 4 . Donc q est **croissante sur $[-2 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 4]$** .
- b. On lit $q(-2) = -6$, $q(1) = 3$ et $q(4) = -6$:

x	-2		1		4
q(x)	-6	↗	3	↘	-6

- c. Le plus grand nombre de la seconde ligne est 3 : le **maximum de q est 3**, atteint en $x = 1$ (point S).
- d. -1 et 0 sont dans $[-2 ; 1]$ où q est croissante, et $-1 < 0$ donc $q(-1) < q(0)$ (on lit $q(-1) = -1$ et $q(0) = 2$). Ensuite 2 et 3 sont dans $[1 ; 4]$ où q est décroissante, et $2 < 3$ donc $q(2) > q(3)$ (on lit 2 et -1).

2 Exploiter un tableau de variations ★★★

- a. f est **décroissante** sur $[-5 ; -1]$ et sur $[3 ; 6]$; elle est **croissante** sur $[-1 ; 3]$.
- b. Le plus grand nombre de la seconde ligne est 4 : maximum 4, atteint en $x = 3$. Le plus petit est -3 : minimum -3 , atteint en $x = -1$.
- c. $-4 < -2$ dans $[-5 ; -1]$ où f est décroissante : $f(-4) > f(-2)$. Puis $0 < 2$ dans $[-1 ; 3]$ où f est croissante : $f(0) < f(2)$.
- d. **Non.** -3 est dans l'intervalle où f décroît de 2 à -3 : $f(-3)$ est un nombre compris entre -3 et 2. 5 est dans l'intervalle où f décroît de 4 à 0 : $f(5)$ est compris entre 0 et 4. Ces deux plages de valeurs se chevauchent (entre 0 et 2) : le tableau ne permet pas de conclure.

3 Comparer des images sans calculer ★★★

- a. $-4,2 < -3,9 \leq 0$ et le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$, donc $(-4,2)^2 > (-3,9)^2$.
- b. $2,4 < 2,5$ et le cube est croissant sur $\mathbb{R}$, donc $2,4^3 < 2,5^3$.
- c. $-1,7 < -1,6$ et le cube est croissant sur $\mathbb{R}$ (aussi pour les négatifs), donc $(-1,7)^3 < (-1,6)^3$.
- d. $(-0,4)^2 = 0,4^2$. Or $0 \leq 0,3 < 0,4$ et le carré est croissant sur $[0 ; +\infty[$, donc $0,3^2 < 0,4^2$, c'est-à-dire $0,3^2 < (-0,4)^2$.

4 Fonctions affines ★★★

Une fonction affine $x \mapsto mx + p$ est croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$. Ici, f a pour coefficient $-3 < 0$: **décroissante**. g a pour coefficient $0,5 > 0$: **croissante**. h est **constante** ($m = 0$).

- a. Comme $1,5^2 = 2,25 > 2 = (\sqrt{2})^2$, on a $\sqrt{2} < 1,5$. f est décroissante, donc $f(\sqrt{2}) > f(1,5)$.
- b. $-\frac{1}{3} \approx -0,333... < -0,3$ et g est croissante, donc $g(-\frac{1}{3}) < g(-0,3)$.

5 Vrai ou faux ? (fonctions de référence) ★★★

- a. **Faux**. $(-2)^2 = 4 > 1^2 = 1$ alors que $-2 < 1$. Le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$ et croissant sur $[0 ; +\infty[$.
- b. **Vrai**. Le cube conserve l'ordre sur tout $\mathbb{R}$.
- c. **Faux**. La racine carrée n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$ (pas de racine d'un nombre négatif) ; elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- d. **Faux** sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-1 < 1$ et pourtant $1/(-1) = -1 < 1 = 1/1$, l'ordre est conservé. Elle est décroissante séparément sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- e. **Vrai**. C'est une fonction affine de coefficient $-1 < 0$.
- f. **Vrai**. $x^2 \geq 0$ pour tout x et $0^2 = 0$, donc 0 est atteint : c'est le minimum.

6 Lire des extremums dans un tableau ★★★

- a. Maximum : **6**, atteint en $x = 2$.
- b. Minimum : **-2**, atteint en $x = 6$.
- c. $g(x) \leq 6$ pour tout x de $[0 ; 10]$, donc $g(x) = 7$ n'a **aucune solution**.
- d. Sur $[0 ; 2]$, g va de 1 à 6 : 0 n'est pas entre 1 et 6, aucune solution. Sur $[2 ; 6]$, g décroît de 6 à -2 : 0 n'est pas entre -2 et 6, aucune solution. Sur $[6 ; 10]$, g croît de -2 à 3 : une solution. Au total **2 solutions**.

7 Inverse et racine carrée ★★★

- a. $7 < 11$ et la racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$: $\sqrt{7} < \sqrt{11}$.
- b. $0 < 2,5 < 2,9$ et l'inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$: $\frac{1}{2,5} > \frac{1}{2,9}$ ($0,4 > 0,344...$).
- c. $-0,5 < -0,3 < 0$ et l'inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$: $\frac{1}{-0,5} > \frac{1}{-0,3}$, soit $-2 > -3,33...$
- d. Les deux nombres -2 et 3 ne sont pas dans le même intervalle de monotonie. On compare avec 0 : $\frac{1}{-2} = -0,5 < 0$ et $\frac{1}{3} > 0$, donc $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$.

8 Courbe, minimum et nombre de solutions ★★★

a. $r(-1) = 1 + 4 + 1 = 6$; $r(2) = 4 - 8 + 1 = -3$; $r(5) = 25 - 20 + 1 = 6$:

x	-1		2		5
r(x)	6	↘	-3	↗	6

b. Minimum : **-3**, atteint en $x = 2$. On peut le justifier : $r(x) = (x - 2)^2 - 3 \geq -3$.

c. • $k = -3$: une solution ($x = 2$). • $k = 0$: 0 est entre -3 et 6 sur $[-1 ; 2]$ et sur $[2 ; 5]$: **2 solutions**. • $k = -4$: en dessous du minimum, **0 solution**. • $k = 6$: on atteint 6 aux deux bornes : **2 solutions**. • $k = 7$: au-dessus du maximum, **0 solution**.

d. $r(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$ (car $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 4x - 5$).
Solutions : $x = 5$ ou $x = -1$. ✓

9 Encadrer des images ★★★

1. f est décroissante sur $[-4 ; 1]$: pour $-4 \leq x \leq 1$, $f(1) \leq f(x) \leq f(-4)$, soit **$-2 \leq f(x) \leq 6$** .

2. $[-3 ; 0]$ est inclus dans $[-4 ; 1]$, donc f y est décroissante : $f(0) \leq f(x) \leq f(-3)$, soit **$-1 \leq f(x) \leq 3$** .

3. g est croissante sur $[2 ; 8]$, donc sur $[4 ; 6]$: $g(4) \leq g(x) \leq g(6)$, soit **$0 \leq g(x) \leq 3$** .
Comme 1 est compris entre $g(4) = 0$ et $g(6) = 3$, l'équation $g(x) = 1$ a **exactement une solution** dans $[4 ; 6]$.

10 Une parabole décalée ★★★

a. $(x - 2)^2 \geq 0$, donc $f(x) = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$. Et $f(2) = 0 + 1 = 1$: le minimum de f est **1**, atteint en $x = 2$.

b. Pour $2 \leq a < b$: $0 \leq a - 2 < b - 2$, le carré est croissant sur $[0 ; +\infty[$, donc $(a - 2)^2 < (b - 2)^2$ et $f(a) < f(b)$: **f est croissante sur $[2 ; +\infty[$** . Pour $a < b \leq 2$: $a - 2 < b - 2 \leq 0$, le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$, donc $(a - 2)^2 > (b - 2)^2$: **f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$** .

c. $f(-1) = (-3)^2 + 1 = 10$ et $f(4) = 2^2 + 1 = 5$, donc $f(-1) > f(4)$. On ne peut pas conclure avec les variations seules : -1 est dans l'intervalle où f décroît, 4 dans celui où f croît. Il faut calculer (ou comparer les distances à 2 : $|-1 - 2| = 3 > |4 - 2| = 2$).

11 Trouver un maximum avec une écriture $5 - (...)^2$ ★★★

a. $(x + 1)^2 \geq 0$ donc $5 - (x + 1)^2 \leq 5$. Égalité si et seulement si $(x + 1)^2 = 0$, soit **$x = -1$** .

b. Le maximum de g est **5**, atteint en $x = -1$.

c. $g(-4) = 5 - 9 = -4$; $g(-1) = 5$; $g(2) = 5 - 9 = -4$. La fonction croît jusqu'à -1 puis décroît :

x	-4		-1		2
g(x)	-4	↗	5	↘	-4

d. Non : $g(x) \leq 5 < 6$ pour tout x , donc $g(x) = 6$ n'a **aucune solution**.

12 Démontrer qu'une fonction affine est décroissante ★★★

- a. $f(a) - f(b) = (-2a + 7) - (-2b + 7) = -2a + 7 + 2b - 7 = 2b - 2a = 2(b - a)$.
b. Comme $a < b$, on a $b - a > 0$ donc $2(b - a) > 0$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. Ainsi, dès que $a < b$, $f(a) > f(b)$: **f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$** .

13 Démontrer les variations de $x^2 + 6x - 1$ ★★★

- a. $(x + 3)^2 - 10 = x^2 + 6x + 9 - 10 = x^2 + 6x - 1 = g(x)$. ✓
b. $(x + 3)^2 \geq 0$ donc $g(x) \geq -10$, avec égalité pour $x = -3$. Le minimum est **-10**, atteint en **$x = -3$** .
c. $g(a) - g(b) = a^2 - b^2 + 6a - 6b = (a - b)(a + b) + 6(a - b) = (a - b)(a + b + 6)$. ✓
d. • Si $-3 \leq a < b$: $a - b < 0$ et $a + b > -6$ donc $a + b + 6 > 0$. Le produit est négatif : $g(a) < g(b)$, **g est croissante sur $[-3 ; +\infty[$** . • Si $a < b \leq -3$: $a - b < 0$ et $a + b < -6$ donc $a + b + 6 < 0$. Le produit de deux négatifs est positif : $g(a) > g(b)$, **g est décroissante sur $]-\infty ; -3]$** .

14 Rectangle de périmètre donné ★★★

- a. Le demi-périmètre est 20 m : l'autre côté mesure $20 - x$ et $x \in [0 ; 20]$. L'aire est $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
b. $100 - (x - 10)^2 = 100 - (x^2 - 20x + 100) = -x^2 + 20x = A(x)$. ✓
c. $A(0) = 0$, $A(10) = 100$, $A(20) = 0$; A est croissante sur $[0 ; 10]$ et décroissante sur $[10 ; 20]$ (car $(x - 10)^2$ décroît puis croît, et on le soustrait) :

x	0		10		20
A(x)	0	↗	100	↘	0

- d. Le maximum est **100 m²**, atteint pour $x = 10$: les côtés valent 10 m et $20 - 10 = 10$ m, l'enclos doit être un **carré de côté 10 m**.

15 Recette d'un commerçant ★★★

- a. $72 - 2(p - 6)^2 = 72 - 2(p^2 - 12p + 36) = 72 - 2p^2 + 24p - 72 = -2p^2 + 24p$. ✓
b. $R(1) = -2 + 24 = 22$; $R(6) = 72$; $R(10) = -200 + 240 = 40$:

x	1		6		10
R(p)	22	↗	72	↘	40

- c. Maximum **72 centaines d'euros, soit 7 200 €**, pour un prix de **6 €**.
- d. Les valeurs du tableau sont 22, 72, 40 : le minimum est **22**, soit 2 200 €, atteint au prix $p = 1$ € (une borne de l'intervalle).
- e. $R(p) \geq 64 \Leftrightarrow 72 - 2(p - 6)^2 \geq 64 \Leftrightarrow (p - 6)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq p - 6 \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 8$. La recette dépasse 6 400 € pour un prix compris entre **4 € et 8 €**.

16 Étude complète sur une courbe ★★★

x	-4		-2		2		4
p(x)	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

- b. Maximum **2**, atteint en $x = -2$ et en $x = 4$. Minimum **-2**, atteint en $x = -4$ et en $x = 2$.
- c. $-3 < -2,5$ dans $[-4 ; -2]$ où p est croissante : $p(-3) < p(-2,5)$. $0 < 1$ dans $[-2 ; 2]$ où p est décroissante : $p(0) > p(1)$.
- d. • $p(x) = 0$: 0 est strictement entre -2 et 2 sur chacune des trois bandes : **3 solutions**. • $p(x) = 2$: sur $[-4 ; -2]$ la valeur 2 est atteinte au bord ($x = -2$) ; sur $[-2 ; 2]$ elle est atteinte au bord ($x = -2$) ; sur $[2 ; 4]$ elle est atteinte au bord ($x = 4$) : les solutions sont $x = -2$ et $x = 4$, soit **2 solutions**. • $p(x) = 2,5$: au-dessus du maximum, **0 solution**.
- e. $p(-3) = (-27 + 36) \div 8 = 9 \div 8 = 1,125$ et $p(-2,5) = (-15,625 + 30) \div 8 = 14,375 \div 8 \approx 1,797$: $1,125 < 1,797$ ✓. $p(0) = 0$ et $p(1) = (1 - 12) \div 8 = -1,375$: $0 > -1,375$ ✓.

17 Opérations sur les fonctions de référence ★★★

1. L'inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$; retrancher 2 ne change pas le sens : **f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$** . Comme $0,5 < 4$, $f(0,5) > f(4)$: en effet $f(0,5) = 2 - 2 = 0$ et $f(4) = 0,25 - 2 = -1,75$.
2. La racine carrée est croissante ; multiplier par $-3 < 0$ inverse le sens ; ajouter 1 ne change rien. **g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$** et son maximum est $g(0) = 1$. Comme $2 < 5$, $g(2) > g(5)$ ($g(2) \approx -3,24$ et $g(5) \approx -5,71$). Sur $[0 ; 9]$: $g(0) = 1$ et $g(9) = -9 + 1 = -8$:

x	0		9
g(x)	1	↘	-8

3. Le cube est croissant sur $\mathbb{R}$; $2 > 0$ conserve le sens ; ajouter 4 ne change rien. **h est croissante sur $\mathbb{R}$** .

18 Le ballon ★★★

- a. $21 - 5(t - 2)^2 = 21 - 5(t^2 - 4t + 4) = 21 - 5t^2 + 20t - 20 = -5t^2 + 20t + 1$. ✓
 b. $(t - 2)^2 \geq 0$ donc $h(t) \leq 21$, avec égalité pour $t = 2$. La hauteur maximale est **21 m**, atteinte à **t = 2 s**.
 c. $h(0) = 1$; $h(2) = 21$; $h(4) = -80 + 80 + 1 = 1$:

x	0		2		4
h(t)	1	↗	21	↘	1

- d. $h(t) \geq 16 \Leftrightarrow 21 - 5(t - 2)^2 \geq 16 \Leftrightarrow (t - 2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3$. Le ballon est à au moins 16 m de hauteur de $t = 1$ s à $t = 3$ s, soit pendant **2 secondes**.

19 Vrai ou faux ? (variations et extremums) ★★★

- a. **Faux**. Avec $f(x) = x^2$: $f(-1) = 1 < f(2) = 4$, mais f décroît sur $[-1 ; 0]$.
 b. **Vrai**. Pour $x \leq 3$, $f(x) \leq f(3)$ par croissance ; pour $x \geq 3$, $f(x) \leq f(3)$ par décroissance. Donc $f(x) \leq f(3)$ sur $[0 ; 7]$.
 c. **Faux**. Le minimum de x^2 sur $[-1 ; 1]$ est 0, atteint en 0 (milieu de l'intervalle).
 d. **Faux**. $f(x) = -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et n'a pas de maximum : ses valeurs sont aussi grandes qu'on veut quand x devient très négatif.
 e. **Faux**. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 1]$ ont le même tableau de variations ($0 \nearrow 1$), mais ne sont pas égales : en $x = 0,5$, l'une vaut 0,5 et l'autre 0,25.

20 Image d'un intervalle ★★★

- a. $(x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$. ✓
 b. $f(-1) = 1 + 2 = 3$; $f(1) = -1$; $f(3) = 9 - 6 = 3$. Le carré $(x - 1)^2$ décroît puis croît, avec un changement en $x = 1$:

x	-1		1		3
f(x)	3	↘	-1	↗	3

- c. Le minimum est -1 (en 1) et le maximum est 3 (atteint en -1 et en 3). Donc $-1 \leq f(x) \leq 3$ pour tout x de $[-1 ; 3]$.
 d. $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Les deux appartiennent à $[-1 ; 3]$: **S = {0 ; 2}**. (Cohérent avec le tableau : 0 est entre 3 et -1, puis entre -1 et 3.)

21 La fonction $x + 1/x$ ★★★

- a. $f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$. Pour $x > 0$, $(x - 1)^2 \geq 0$ et $x > 0$, donc $f(x) - 2 \geq 0$, soit $f(x) \geq 2$. De plus $f(1) = 1 + 1 = 2$: le **minimum de f est 2**, atteint en $x = 1$.
 b. $f(a) - f(b) = (a - b) + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (a - b) + \frac{b - a}{ab} = (a - b) - \frac{a - b}{ab} = (a - b)(1 - \frac{1}{ab}) = \frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$.

- c. On a $ab > 0$ et $a - b < 0$. • Si $0 < a < b \leq 1$: $ab < 1$ donc $ab - 1 < 0$; le numérateur est un produit de deux négatifs, positif : $f(a) > f(b)$, f est **décroissante sur $]0 ; 1]$** . • Si $1 \leq a < b$: $ab > 1$ donc $ab - 1 > 0$; le numérateur est négatif : $f(a) < f(b)$, f est **croissante sur $[1 ; +\infty[$** .
- d. Le tableau : f décroît sur $]0 ; 1]$, atteint 2 en 1, puis croît :

x	0	1	$+\infty$
f(x)	$\searrow$ (valeurs > 2)	2 (minimum)	$\nearrow$ (valeurs > 2)

$f(2) = 2 + 0,5 = 2,5$ et $f(1/2) = 0,5 + 2 = 2,5$: **$f(2) = f(1/2)$** , ce qui n'était pas devinable avec le tableau seul puisque 2 et $1/2$ sont de part et d'autre de 1.

22 Déterminer une fonction affine ★★★

- a. $a = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-2 - 7/3}{3} = \frac{-9/3}{3} = -3$. Puis $f(2) = 7$ donne $-6 + b = 7$, d'où $b = 13$. Donc $f(x) = -3x + 13$. Vérification : $f(5) = -15 + 13 = -2$ ✓.
- b. $a = -3 < 0$: **f est décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- c. $-3x + 13 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{3}$ (on divise par -3 , l'inégalité change de sens). Solutions : **$]-\infty ; 13/3]$** . C'est cohérent avec la décroissance : $f(x) = 0$ en $\frac{13}{3} \approx 4,33$, et f est positive avant.

23 Ranger sans calculatrice ★★★

On écarte les signes : $(-2,3)^2 = 2,3^2$; $(-1,2)^2 = 1,2^2$; $(-0,3)^2 = 0,3^2$. Les nombres 0,3 ; 1,2 ; 1,5 ; 2,3 sont tous dans $[0 ; +\infty[$ où le carré est croissant, donc $0,3^2 < 1,2^2 < 1,5^2 < 2,3^2$. Ainsi : **$D < C < B < A$** . Vérification : $D = 0,09$; $C = 1,44$; $B = 2,25$; $A = 5,29$.