

Variations et extremums

Cours de maths - 2de

Une courbe monte, puis redescend, puis remonte : comment décrire cela avec précision, sans dessin sous les yeux ? Dans ce chapitre, tu apprends à **lire et écrire le sens de variation** d'une fonction, à construire un **tableau de variations**, à repérer le **maximum** et le **minimum**, et à t'en servir pour **comparer des images** sans rien calculer.

1. Sens de variation d'une fonction

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I (ou une réunion d'intervalles) et a et b sont deux nombres de I .

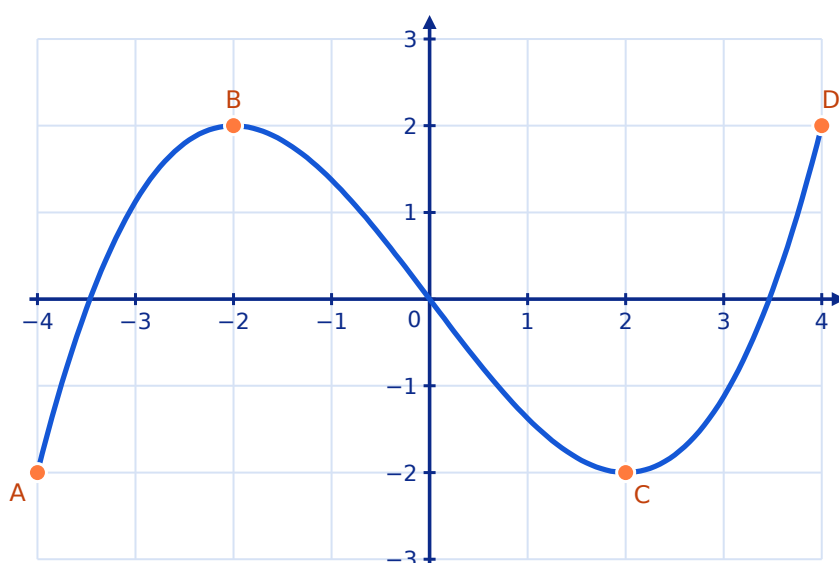
Fonction croissante, décroissante, constante • f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Une fonction croissante **conserve l'ordre**.

• f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. Elle **renverse l'ordre**.

• f est **constante** sur I si $f(a) = f(b)$ pour tous a et b de I .

Quand les inégalités sont strictes ($f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$), on dit que la fonction est **strictement** croissante ou **strictement** décroissante. Une fonction qui est croissante sur I ou décroissante sur I est dite **monotone** sur I .

Sur la courbe, « croissante » signifie que la courbe **monte** quand on la parcourt de gauche à droite ; « décroissante » qu'elle **descend**. Voici la courbe d'une fonction f définie sur $[-4 ; 4]$:



Lire les variations D'après la courbe : f est croissante sur $[-4 ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 4]$. Sur $[-2 ; 2]$, plus l'abscisse augmente, plus l'ordonnée diminue : par exemple $f(-1) > f(1)$.

Piège : on parle toujours d'un intervalle Dire « f est croissante » n'a de sens que sur un intervalle précis. La fonction de la figure n'est ni croissante ni décroissante sur $[-4 ; 4]$ tout entier. Et le point B appartient à la fois à $[-4 ; -2]$ et à $[-2 ; 2]$: on peut écrire l'un ou l'autre des intervalles fermés, c'est la même fonction.

Piège : deux images ne suffisent pas Savoir que $f(-1) < f(2)$ ne prouve pas que f est croissante sur $[-1 ; 2]$. Il faut que l'inégalité soit vraie pour **tous** les couples de nombres de l'intervalle. Exemple : pour la fonction carré, $1 < 4$ et pourtant la fonction n'est pas croissante sur $[-1 ; 2]$ (elle descend d'abord jusqu'à 0).

2. Le tableau de variations

Tableau de variations C'est un résumé de l'allure de la fonction. Sur la première ligne, on écrit les valeurs de x où le sens de variation change, ainsi que les bornes de l'intervalle d'étude, rangées dans l'ordre croissant. Sur la seconde ligne, on écrit les **images** de ces valeurs, et entre elles une flèche ↗ (la fonction croît) ou ↘ (la fonction décroît).

Le tableau de variations de la fonction de la figure précédente :

x	-4		-2		2		4
f(x)	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Dresser le tableau de variations à partir d'une courbe 1) Repère les abscisses où la courbe change de direction (là où elle passe de « monte » à « descend » ou l'inverse) et note les bornes de l'intervalle d'étude.

2) Lis les ordonnées correspondantes sur l'axe vertical.

3) Écris la première ligne, puis la seconde avec les images et les flèches : la flèche doit être cohérente avec les valeurs (une flèche ↗ va d'une petite valeur vers une plus grande).

Lire un tableau de variations Le tableau dit tout ce qu'il faut sur les sens de variation et sur les valeurs prises aux « sommets ». Il ne donne pas toutes les valeurs : $f(0)$ n'est pas lisible si 0 n'est pas dans la première ligne. On sait seulement que $f(0)$ est comprise entre les valeurs voisines du tableau.

3. Variations des fonctions de référence

Cinq familles de fonctions sont à connaître par cœur (ou à savoir retrouver avec leur courbe). Les propriétés suivantes sont admises, sauf pour le carré que l'on démontre plus loin.

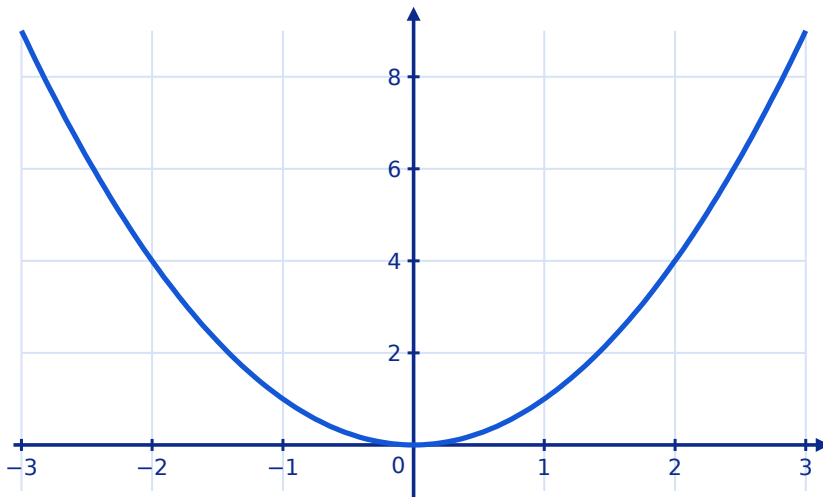
Fonctions de référence • Fonction affine $f(x) = mx + p$ sur $\mathbb{R}$: croissante si $m > 0$, décroissante si $m < 0$, constante si $m = 0$.

- **Fonction carré** $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$: décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$. Son minimum est 0, atteint en 0.

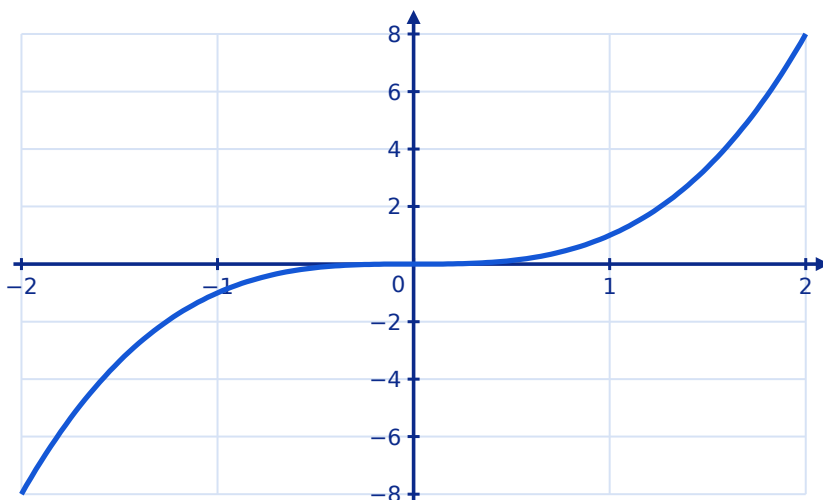
- **Fonction cube** $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$: croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Fonction racine carrée** $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$: croissante sur $[0 ; +\infty[$.

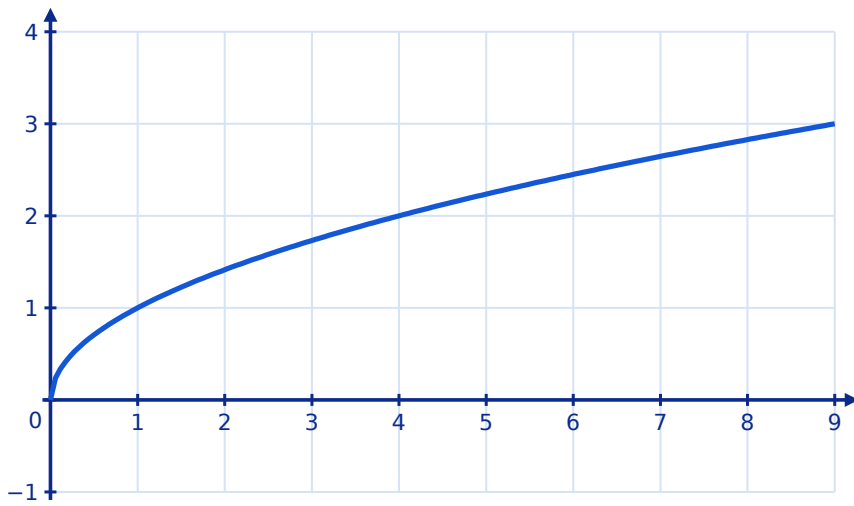
- **Fonction inverse** $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$: décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.



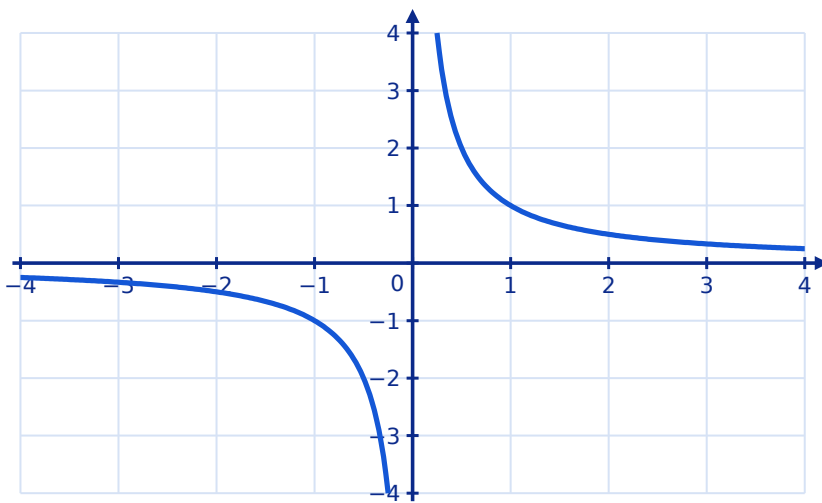
Carré : la courbe (une parabole) descend jusqu'à l'origine, puis remonte.



Cube : la courbe monte tout le temps, avec un petit « palier » en 0.



Racine carrée : définie seulement pour $x \geq 0$; la courbe monte, de plus en plus lentement.



Inverse : deux branches, une pour $x < 0$ et une pour $x > 0$; la fonction n'est pas définie en 0.

Piège : l'inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ On ne peut pas écrire que l'inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-1 < 1$ mais $\mathbf{1/-1 = -1 < 1 = 1/1}$, l'ordre est conservé ! La décroissance a lieu séparément sur chacune des deux branches. Même remarque pour les comparaisons : si deux nombres sont de signes contraires, on compare plutôt avec 0 (un nombre négatif a un inverse négatif, un nombre positif a un inverse positif).

Démonstration : la fonction carré • Soient $0 \leq a < b$. Alors $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Or $b - a > 0$ et $b + a > 0$ (car $b > 0$ et $a \geq 0$). Donc $b^2 - a^2 > 0$, c'est-à-dire $a^2 < b^2$: le carré est croissant sur $[0 ; +\infty[$.

• Soient $a < b \leq 0$. Alors $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or $a - b < 0$ et $a + b < 0$ (car $a < 0$ et $b \leq 0$). Le produit de deux négatifs est positif : $a^2 > b^2$. Le carré est décroissant sur $] -\infty ; 0]$.

Ajouter une constante, multiplier par un réel k Soit f une fonction définie sur I , c un réel et k un réel non nul.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/variations-et-extremums-cours-2de/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

- $f + c$ (on ajoute c aux images) a **les mêmes variations** que f .
- kf avec $k > 0$ a **les mêmes variations** que f ; avec $k < 0$, elle a **les variations contraires**.

En effet, si $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$, alors $kf(a) \leq kf(b)$ si $k > 0$, et $kf(a) \geq kf(b)$ si $k < 0$ (multiplier par un négatif renverse l'ordre).

Exemple $g(x) = -2\sqrt{x} + 5$ sur $[0 ; +\infty[$: la racine carrée est croissante, $-2 < 0$ inverse le sens, ajouter 5 ne change rien. Donc g est **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$, et son maximum est $g(0) = 5$.

4. Maximum et minimum d'une fonction

Maximum, minimum Soit f définie sur I et x_0 un réel de I .

- f admet un **maximum** M sur I , atteint en x_0 , si $f(x_0) = M$ et si $f(x) \leq M$ pour tout x de I .
- f admet un **minimum** m sur I , atteint en x_0 , si $f(x_0) = m$ et si $f(x) \geq m$ pour tout x de I .

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

Ne pas confondre la valeur et l'endroit Le maximum est une **ordonnée** (une valeur de $f(x)$), pas une abscisse. Pour la fonction de la figure précédente, le maximum de f sur $[-4 ; 4]$ est 2 ; il est **atteint** en $x = -2$ et en $x = 4$. Le minimum est -2 , atteint en $x = -4$ et en $x = 2$. Un extremum peut donc être atteint plusieurs fois, et en une borne de l'intervalle.

Trouver les extremums avec un tableau de variations Sur l'intervalle d'étude, le plus grand nombre de la seconde ligne est le maximum et le plus petit est le minimum, **à condition que les variations entre ces valeurs soient bien celles du tableau** (la fonction ne dépasse pas ces valeurs entre deux colonnes, puisqu'elle est monotone entre elles).

Extremum sur un intervalle plus petit Un extremum dépend de l'intervalle : sur $[-4 ; 4]$ le maximum de la fonction précédente est 2, mais sur $[-1 ; 1]$ le maximum est $f(-1) = (-1 + 12)/8 = \mathbf{11/8} \approx 1,4$ (la fonction y est décroissante). Toujours préciser « sur quel intervalle ».

5. Comparer des images grâce aux variations

Comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans calculer 1) Trouve un intervalle I qui contient a et b sur lequel f est monotone.

2) Compare a et b .

3) Conclus : si f est croissante, $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre que a et b ; si f est décroissante, dans l'ordre contraire.

Exemples • $(-3,2)^2$ et $(-2,7)^2$: $-3,2 < -2,7 \leq 0$ et le carré est décroissant sur $] -\infty ;$

0], donc $(-3,2)^2 > (-2,7)^2$.

- $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$: $5 < 7$ et la racine carrée est croissante, donc $\sqrt{5} < \sqrt{7}$.
- **1/0,4** et **1/0,9** : $0,4 < 0,9$, tous deux dans $]0 ; +\infty[$ où l'inverse est décroissante, donc **1/0,4 > 1/0,9**.

Quand on ne peut pas conclure Si a et b sont de part et d'autre d'un changement de variation, on ne peut pas conclure avec le seul tableau. Par exemple pour le tableau de la partie 2, $f(-3)$ et $f(3)$: $f(-3)$ est quelque part entre -2 et 2 , $f(3)$ aussi, impossible de les comparer. On compare alors avec des calculs, ou on utilise une symétrie.

Encadrer des images Si f est croissante sur $[a ; b]$, alors pour tout x de $[a ; b]$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Si f est décroissante sur $[a ; b]$, alors $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Exemple f est décroissante sur $[1 ; 6]$ avec $f(1) = 8$ et $f(6) = -2$. Pour $1 \leq x \leq 6$, on a donc $-2 \leq f(x) \leq 8$.

6. Utiliser le tableau pour résoudre des équations $f(x) = k$

Propriété (admise) Si f est **strictement monotone** et dessinée « d'un seul trait » (sans coupure) sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a **exactement une solution** dans $[a ; b]$. Si k n'est pas entre $f(a)$ et $f(b)$, elle n'a aucune solution sur cet intervalle.

Compter les solutions de $f(x) = k$ Pour chaque colonne de flèche du tableau, on regarde si k est compris entre les deux valeurs voisines : si oui, une solution dans cet intervalle ; sinon, aucune. On additionne (attention à ne pas compter deux fois une solution située à la frontière entre deux intervalles).

Exemple Avec le tableau de la partie 2 (valeurs $-2, 2, -2, 2$), combien de solutions pour $f(x) = 0$? Sur $[-4 ; -2]$, 0 est entre -2 et 2 : 1 solution. Sur $[-2 ; 2]$, 0 est entre 2 et -2 : 1 solution. Sur $[2 ; 4]$, 0 est entre -2 et 2 : 1 solution. Au total, **3 solutions**. Et $f(x) = 3$? 3 n'est jamais entre -2 et 2 : **aucune solution**.

7. Démontrer un sens de variation

Méthode par comparaison de $f(a)$ et $f(b)$ 1) Prends deux réels $a < b$ dans l'intervalle I (en général on les suppose tous les deux du bon côté d'une valeur remarquable).

2) Étudie le **signe de $f(a) - f(b)$** (ou de $f(b) - f(a)$), souvent en factorisant.

3) Conclus : si $f(a) - f(b) \leq 0$, f est croissante ; si $f(a) - f(b) \geq 0$, décroissante.

Exemple : $f(x) = -4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ Soient $a < b$. $f(a) - f(b) = (-4a + 3) - (-4b + 3) = 4(b - a) > 0$. Donc $f(a) > f(b)$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : une parabole décalée Soit $g(x) = (x - 2)^2 + 1$. $g(x) \geq 1$ pour tout x , car un carré est positif, et $g(2) = 1$: le minimum de g est 1, atteint en 2. Pour tout $2 \leq a < b$, on a $0 \leq a - 2 < b - 2$, donc $(a - 2)^2 < (b - 2)^2$ par croissance du carré sur $[0 ; +\infty[$: g est croissante sur $[2 ; +\infty[$. De même, g est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

Mathbot dit « Pour trouver un maximum, essaie d'écrire $f(x) = M - (\text{quelque chose})^2$: un carré est toujours positif, donc $f(x) \leq M$! Pour un minimum, écris $m + (\text{quelque chose})^2$. »

8. Extremums et problèmes concrets

Beaucoup de problèmes demandent d'« optimiser » : trouver l'aire la plus grande, le coût le plus bas, la hauteur maximale d'un ballon. La démarche est toujours la même.

Résoudre un problème d'optimisation

- 1) Choisis la **variable** x (avec son unité) et précise l'**intervalle** des valeurs possibles.
- 2) Exprime la grandeur étudiée en fonction de x : $f(x)$.
- 3) Étudie les variations de f sur l'intervalle (forme $M - (\dots)^2$, fonction de référence, tableau).
- 4) Lis l'extremum, dis **en quelle valeur** de x il est atteint, et rédige une phrase réponse avec l'unité.

Exemple On dispose de 30 m de clôture pour entourer un rectangle de côtés x et $15 - x$ (en m), avec $0 \leq x \leq 15$. Son aire est $A(x) = x(15 - x) = -x^2 + 15x = 56,25 - (x - 7,5)^2$, car $(x - 7,5)^2 = x^2 - 15x + 56,25$. Comme $(x - 7,5)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 56,25$, avec égalité pour $x = 7,5$. L'aire maximale est **56,25 m²**, obtenue pour un carré de côté 7,5 m.

À retenir

- f croissante sur I : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (l'ordre est conservé) ; décroissante : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ (l'ordre est renversé).
- Un tableau de variations résume les sens de variation, avec les images aux valeurs charnières ; on lit les extremums sur sa seconde ligne.
- Fonctions de référence : affine (selon le signe de m), carré ($\searrow$ sur $]-\infty ; 0]$, $\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$), cube ($\nearrow$ sur $\mathbb{R}$), racine carrée ($\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$), inverse ($\searrow$ sur chaque branche).
- $f + c$ garde les variations de f ; $k f$ les garde si $k > 0$ et les renverse si $k < 0$.
- Le maximum (ou le minimum) est une valeur de $f(x)$; on précise l'abscisse où il est atteint et l'intervalle étudié.
- Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$: intervalle de monotonie commun, comparer a et b , conclure avec le sens de variation.
- Pour démontrer une variation : étudier le signe de $f(a) - f(b)$ pour $a < b$; pour un extremum : écrire $f(x) = M - (\dots)^2$ ou $m + (\dots)^2$.