

Variations et extremums des fonctions

Contrôle de maths - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Étude d'une fonction polynôme / 5 pts

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ définie sur $[0 ; 5]$.

- Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- Étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f sur $[0 ; 5]$.
- Donne les extremums locaux de f . Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[0 ; 5]$? En quelles valeurs de x sont-ils atteints ?

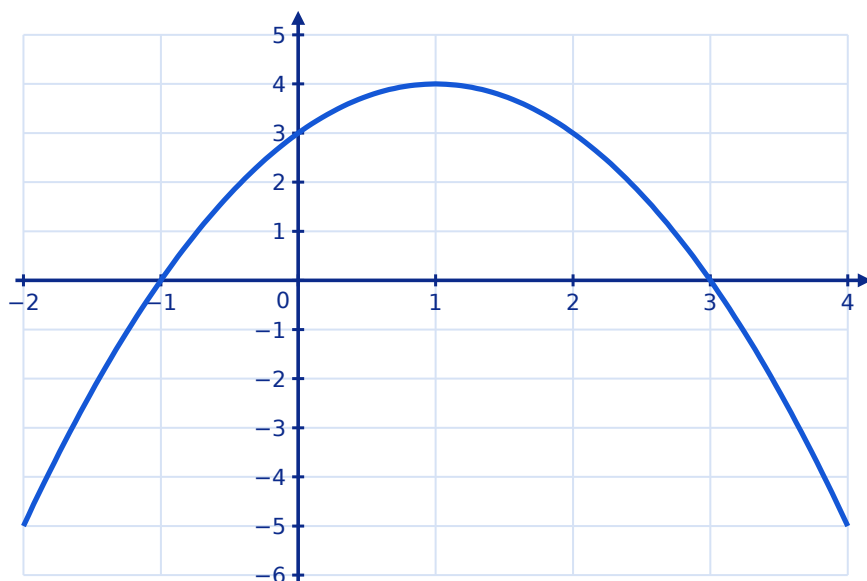
2 Une fonction rationnelle / 3 pts

Soit $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- Montre que $f'(x) = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x^2}$.
- Dresse le tableau de variations de f . Quel est son minimum ?
- Déduis-en que, pour tout $x > 0$, $2x^2 - 8x + 8 \geq 0$.

3 Lire la courbe d'une dérivée / 3 pts

On donne ci-dessous la courbe de la **dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $[-2 ; 4]$.



- a. Dresse le tableau de signes de f' sur $[-2 ; 4]$.
- b. Dédus-en le tableau de variations de f (sans valeurs numériques).
- c. f admet-elle un extremum local ? Précise sa nature et son abscisse. Que représente le nombre $f'(1) = 4$ pour la courbe de f ?

4 Déterminer une fonction / 4 pts

Soit $f(x) = ax^3 + bx$, où a et b sont deux réels. On sait que f admet un extremum local en $x = 2$ et que $f(2) = -16$.

- a. Calcule $f'(x)$ et traduis les deux informations par un système d'équations. Résous-le.
- b. Pour la suite, on prend $f(x) = x^3 - 12x$. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donne ses extremums locaux.

5 Problème d'optimisation / 5 pts

Un artisan veut fabriquer un bac en métal, sans couvercle, à base carrée, de volume 32 dm^3 . On note x (en dm) le côté de la base, avec $x > 0$, et h la hauteur. La quantité de métal est l'aire de la base plus celle des quatre faces latérales.

- a. Exprime h en fonction de x , puis montre que l'aire de métal est $S(x) = x^2 + \mathbf{128/x}$.
- b. Montre que $S'(x) = \mathbf{2(x^3 - 64)/x^2}$.
- c. Vérifie que $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$ et montre que $x^2 + 4x + 16 > 0$ pour tout réel x . Dédus le signe de $S'(x)$.
- d. Dresse le tableau de variations de S et conclus : quelles dimensions donnent le moins de métal ? Quelle est alors l'aire de métal ?