

Variations et extremums des fonctions

Corrigé du contrôle - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Étude d'une fonction polynôme / 5 pts

Barème : a) 1,5 pt ; b) 2 pts ; c) 1,5 pt. Calculatrice non nécessaire.

- a. (1,5 pt) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- b. (2 pts) Racines 1 et 3, coefficient $3 > 0$: $f' > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f' < 0$ sur $]1 ; 3[$, $f' > 0$ sur $]3 ; 5]$. $f(0) = 1$; $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$; $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$; $f(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$:

x	0		1		3		5
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	5	↘	1	↗	21

- c. (1,5 pt) Maximum local 5 en $x = 1$; minimum local 1 en $x = 3$. Sur $[0 ; 5]$, on compare 1 ; 5 ; 1 ; 21 : le **maximum** est **21**, atteint en $x = 5$; le **minimum** est **1**, atteint en $x = 0$ **et** en $x = 3$.

2 Une fonction rationnelle / 3 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt.

- a. (1 pt) $f'(x) = 2 - 8/x^2 = 2x^2 - 8/x^2 = 2(x^2 - 4)/x^2 = 2(x - 2)(x + 2)/x^2$.
- b. (1 pt) Sur $]0 ; +\infty[$, $2(x + 2) > 0$ et $x^2 > 0$: f' a le signe de $x - 2$. $f(2) = 4 + 4 = 8$:

x	0		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	8	↗	

Le minimum de f est **8**, atteint en $x = 2$.

- c. (1 pt) D'après b), $f(x) \geq 8$, soit $2x + 8/x \geq 8$. On multiplie par $x > 0$ (le sens est conservé) : $2x^2 + 8 \geq 8x$, donc $2x^2 - 8x + 8 \geq 0$. (On retrouve $2(x - 2)^2 \geq 0$.)

3 Lire la courbe d'une dérivée / 3 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt.

- a. (1 pt) La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$. Elle est sous l'axe

avant -1 et après 3 , au-dessus entre les deux :

x	-2		-1		3		4
f'(x)		-	0	+	0	-	

- b. (1 pt) f est décroissante sur $[-2 ; -1]$, croissante sur $[-1 ; 3]$, décroissante sur $[3 ; 4]$.
- c. (1 pt) f' s'annule en changeant de signe en -1 ($-$ puis $+$) : **minimum local en $x = -1$** . Elle s'annule en 3 en passant de $+$ à $-$: **maximum local en $x = 3$** . $f'(1) = 4$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse 1 .

4 Déterminer une fonction / 4 pts

Barème : a) 2 pts ; b) 2 pts.

- a. (2 pts) $f'(x) = 3ax^2 + b$. Un extremum local en 2 impose $f'(2) = 0 : 12a + b = 0$. Et $f(2) = 8a + 2b = -16$. De la première, $b = -12a$; on remplace : $8a - 24a = -16$, donc $-16a = -16$ et $a = 1$, puis $b = -12$.
- b. (2 pts) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$: positif sur $] -\infty ; -2[$, négatif sur $] -2 ; 2[$, positif sur $] 2 ; +\infty[$. $f(-2) = -8 + 24 = 16$ et $f(2) = -16$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	16	↘	-16	↗	

Maximum local **16** en $x = -2$, minimum local **-16** en $x = 2$ (conforme à l'énoncé).

5 Problème d'optimisation / 5 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1,5 pt ; d) 1,5 pt. Calculatrice non nécessaire.

- a. (1 pt) Le volume est $x^2h = 32$, donc $h = \mathbf{32/x^2}$. L'aire est $x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \mathbf{32/x^2} = x^2 + \mathbf{128/x}$.
- b. (1 pt) $S'(x) = 2x - \mathbf{128/x^2} = \mathbf{2x^3 - 128/x^2} = \mathbf{2(x^3 - 64)/x^2}$.
- c. (1,5 pt) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 16x - 64 = x^3 - 64$. ✓ Le trinôme $x^2 + 4x + 16$ a pour discriminant $16 - 64 = -48 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif. Comme $x^2 > 0$, $S'(x)$ a le signe de $x - 4$: négatif sur $]0 ; 4[$, positif sur $]4 ; +\infty[$.
- d. (1,5 pt) $S(4) = 16 + 32 = 48$:

x	0		4		$+\infty$
S'(x)		-	0	+	
S(x)		↘	48	↗	

Le minimum est atteint pour $x = 4$ dm, avec $h = \mathbf{32/16} = 2$ dm. Le bac qui utilise

le moins de métal a une base de **4 dm** × **4 dm**, une hauteur de **2 dm**, et il faut **48 dm²** de métal.