

Variations et extremums des fonctions

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lire les variations sur une courbe ★★★

- a. La courbe monte de $(-2 ; -2)$ à $(-1 ; 2)$, descend jusqu'à $(1 ; -2)$, puis remonte jusqu'à $(2 ; 2)$:

x	-2		-1		1		2
f(x)	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

- b. Le maximum de f sur $[-2 ; 2]$ est **2**. Il est atteint pour $x = -1$ et pour $x = 2$.
 c. La droite horizontale $y = 1$ coupe la courbe en trois points, un sur chaque morceau monotone (1 est compris entre -2 et 2 dans les trois cas) : l'équation $f(x) = 1$ a **3 solutions**.

2 Un trinôme du second degré ★★★

- a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 6$.
 b. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 3[$, $f'(3) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]3 ; +\infty[$.
 c. $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	-4	↗	

- d. f' s'annule en changeant de signe de $-$ à $+$ en 3 : f admet un **minimum** égal à **-4**, atteint en $x = 3$ (le sommet de la parabole est $S(3 ; -4)$).

3 Du signe de la dérivée aux variations ★★★

- a. Les racines sont -1 et 4 , le coefficient dominant de $(x - 4)(x + 1) = x^2 - 3x - 4$ est $1 > 0$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	-3		-1		4		6
f'(x)		+	0	-	0	+	

- b. f est croissante sur $[-3 ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 4]$, croissante sur $[4 ; 6]$.
 c. 0 et 2 sont dans $[-1 ; 4]$ où f est décroissante, et $0 < 2$: $f(0) > f(2)$. 5 et 6 sont

dans $[4 ; 6]$ où f est croissante : $f(5) < f(6)$. -3 et -2 sont dans $[-3 ; -1]$ où f est croissante : $f(-3) < f(-2)$.

4 Un polynôme de degré 3 ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.
b. Les racines sont -2 et 2 , le coefficient 3 est positif : $f' > 0$ sur $]-\infty ; -2[$, $f' < 0$ sur $] -2 ; 2[$, $f' > 0$ sur $]2 ; +\infty[$. $f(-2) = -8 + 24 = 16$ et $f(2) = 8 - 24 = -16$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	16	↘	-16	↗	

- c. Maximum local **16** en $x = -2$; minimum local **-16** en $x = 2$.
d. $f(10) = 1\,000 - 120 = 880 > 16$. Donc 16 n'est pas le plus grand de toutes les valeurs de f : le maximum local en -2 n'est **pas global** et f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

5 Tangentes horizontales ★★★

- a. La tangente est horizontale en a si $g'(a) = 0$. Or $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$. Comme $g(0) = 0$ et $g(2) = 8 - 12 = -4$, les points sont $O(0 ; 0)$ et $A(2 ; -4)$.
b. Les racines sont 0 et 2 , le coefficient 3 est positif : $g' > 0$ sur $]-\infty ; 0[$, $g' < 0$ sur $]0 ; 2[$, $g' > 0$ sur $]2 ; +\infty[$. g' change de signe en 0 (de $+$ à $-$) : **maximum local** 0 en $x = 0$. g' change de signe en 2 (de $-$ à $+$) : **minimum local** -4 en $x = 2$.

6 Une fonction homographique ★★★

- a. Avec $u = 2x + 1$ et $v = x - 3$: $u' = 2$ et $v' = 1$. Donc $k'(x) = \frac{2(x - 3) - (2x + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x - 3)^2} = \frac{-7}{(x - 3)^2}$.
b. $(x - 3)^2 > 0$ sur $]3 ; +\infty[$ donc $k'(x) < 0$: k est **strictement décroissante** sur $]3 ; +\infty[$.
c. $4 < 5 < 13$ et k décroissante : $k(4) > k(5) > k(13)$, donc l'ordre croissant est $k(13) < k(5) < k(4)$. Vérification : $k(4) = 9$; $k(5) = \frac{11}{2} = 5,5$; $k(13) = \frac{27}{10} = 2,7$. ✓

7 Vrai ou faux ? Justifie. ★★★

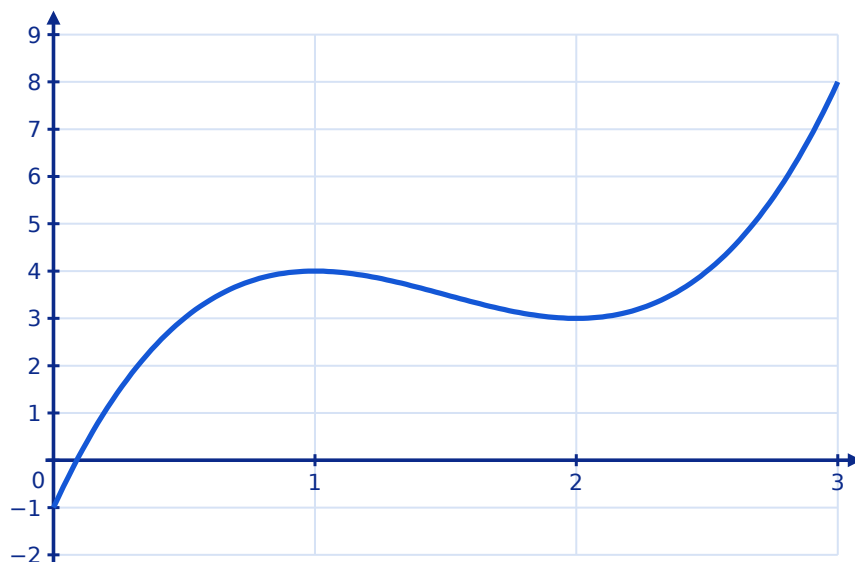
- a. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x^3$ en $a = 0$: $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante, il n'y a pas d'extremum. Il faut que f' change de signe.
b. **Vrai.** C'est la réciproque du théorème de cours : une fonction dérivable croissante sur un intervalle a une dérivée positive ou nulle.
c. **Vrai.** f est croissante sur $[0 ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; 2]$: $f(x) \leq f(1)$ pour tout x de $[0 ; 2]$, c'est même un maximum global.

- d. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[0 ; 1]$ a pour maximum 1 en $x = 1$, mais $f'(1) = 1 \neq 0$. Un extremum situé à une borne n'impose rien sur la dérivée.
- e. **Vrai.** C'est le théorème « extremum local à l'intérieur de l'intervalle $\Rightarrow$ dérivée nulle » : $f'(2) = 0$, donc la tangente est horizontale.

8 Maximum et minimum sur un intervalle ★★★

- a. $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$.
- b. Racines 1 et 2, coefficient $6 > 0$: $f' > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f' < 0$ sur $]1 ; 2[$, $f' > 0$ sur $]2 ; 3]$. $f(0) = -1$; $f(1) = 2 - 9 + 12 - 1 = 4$; $f(2) = 16 - 36 + 24 - 1 = 3$; $f(3) = 54 - 81 + 36 - 1 = 8$:

x	0		1		2		3
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-1	↗	4	↘	3	↗	8



- c. Maximum local 4 en $x = 1$; minimum local 3 en $x = 2$. Sur $[0 ; 3]$, on compare -1 ; 4 ; 3 ; 8 : le **maximum** est **8**, atteint en $x = 3$ (une borne), et le **minimum** est **-1**, atteint en $x = 0$ (l'autre borne). Les extremums locaux ne sont donc pas globaux.

9 Un polynôme de degré 4 ★★★

- a. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$.
- b. Tableau de signes (une ligne par facteur) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
4x		-		-	0	+		+	
x - 1		-		-		-	0	+	
x + 1		-	0	+		+		+	
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Avec $f(-1) = f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$ et $f(0) = 3$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	

- c. $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x) - 2$. Un carré est positif ou nul, donc $f(x) \geq 2$ pour tout réel x , avec égalité pour $x = \pm 1$: le **minimum** de f sur $\mathbb{R}$ est **2**, atteint en -1 et en 1 . En 0 , le maximum local vaut 3 .

10 Un quotient avec un carré ★★★

- a. Avec $u = x$ et $v = x^2 + 1$: $u' = 1$, $v' = 2x$. Donc $f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- b. Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, positif entre -1 et 1 , négatif à l'extérieur. Valeurs : $f(-3) = -\frac{3}{10} = -0,3$; $f(-1) = -\frac{1}{2} = -0,5$; $f(1) = 0,5$; $f(3) = 0,3$:

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	-0,3	$\searrow$	-0,5	$\nearrow$	0,5	$\searrow$	0,3

- c. On compare $-0,3$; $-0,5$; $0,5$; $0,3$: le **maximum** est **0,5** en $x = 1$ et le **minimum** est **-0,5** en $x = -1$.

11 Le rectangle de périmètre minimal ★★★

- a. Aire = 25 donc l'autre côté mesure $\frac{25}{x}$ m. Périmètre : $P(x) = 2(x + \frac{25}{x}) = 2x + \frac{50}{x}$.
- b. $P'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2} = \frac{2(x^2 - 25)}{x^2} = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2}$.
- c. Sur $]0 ; +\infty[$, $2(x + 5) > 0$ et $x^2 > 0$: P' a le signe de $x - 5$. $P(5) = 10 + 10 = 20$:

x	0		5		$+\infty$
$P'(x)$		-	0	+	
$P(x)$		$\searrow$	20	$\nearrow$	

- d. Le périmètre est minimal pour $x = 5$: l'autre côté mesure $\frac{25}{5} = 5$ m. C'est un **carré de 5 m de côté**, de périmètre **20 m**. (Par comparaison, un rectangle 2 m $\times$ 12,5 m a un périmètre de 29 m.)

12 Retrouver une parabole ★★★

- a. $f(0) = 1$ donne $c = 1$. $f'(x) = 2ax + b$, et $f'(2) = 0$ donne $4a + b = 0$. $f(2) = 5$ donne $4a + 2b + c = 5$.
- b. De $c = 1$: $4a + 2b = 4$. De $4a + b = 0$: $b = -4a$. En remplaçant : $4a - 8a = 4$, donc $a = -1$, puis $b = 4$. Ainsi **$f(x) = -x^2 + 4x + 1$** . Vérification : $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$. ✓

c. $f'(x) = -2x + 4$, positive pour $x < 2$ et négative pour $x > 2$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	5	↘	

f' passe de + à - en 2 : $f(2) = 5$ est bien un **maximum** (global ici).

13 Retrouver les coefficients d'un polynôme ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$ et $f'(3) = 27 + 6a + b = 0$.
b. En soustrayant les deux équations : $(27 + 6a + b) - (3 - 2a + b) = 24 + 8a = 0$, donc $a = -3$. Puis $b = 2a - 3 = -9$. On obtient $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$, ce qui confirme les racines -1 et 3.
c. $f' > 0$ sur $[-3 ; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1 ; 3[$, $f' > 0$ sur $]3 ; 5]$. $f(-3) = -27 - 27 + 27 + 1 = -26$; $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$; $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$; $f(5) = 125 - 75 - 45 + 1 = 6$:

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-26	↗	6	↘	-26	↗	6

14 Lire la courbe de la dérivée ★★★

- a. La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et en $x = 2$. Elle est au-dessus de l'axe avant -1 et après 2, en dessous entre -1 et 2 :

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

- b. f est croissante sur $[-3 ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 2]$, croissante sur $[2 ; 4]$ (flèches ↗, ↘, ↗).
c. f' s'annule en changeant de signe en -1 (+ puis -) : **maximum local en $x = -1$** ; et en 2 (- puis +) : **minimum local en $x = 2$** .
d. $0 < 1$ dans $[-1 ; 2]$ où f décroît : $f(0) > f(1)$. $3 < 4$ dans $[2 ; 4]$ où f croît : $f(3) < f(4)$.

15 Une inégalité classique ★★★

- a. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$.
b. Sur $]0 ; +\infty[$, $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$: g' a le signe de $x - 1$. $g(1) = 2$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	2	↗	

- c. Le minimum de g sur $]0 ; +\infty[$ est 2, donc $g(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$.
- d. La somme d'un nombre positif et de son inverse est toujours ≥ 2 , et elle vaut exactement 2 pour le nombre **1** (seul antécédent du minimum, g étant strictement monotone de part et d'autre de 1).

16 Combien de solutions ? ★★★

- a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$: positive sur $[-2 ; -1[$, négative sur $] -1 ; 1[$, positive sur $]1 ; 2]$. $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$; $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$; $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$; $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$:

x	-2		-1		1		2
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

- b. f est strictement monotone sur chacun des trois intervalles, et 0 est compris entre les valeurs aux bornes (-1 et 3, puis 3 et -1 , puis -1 et 3) : l'équation $f(x) = 0$ a **3 solutions** : une dans $] -2 ; -1[$, une dans $] -1 ; 1[$ (plus précisément $]0 ; 1[$ car $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) < 0$), une dans $]1 ; 2]$.
- c. $f(0,3) = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0$ et $f(0,4) = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0$: **$0,3 < \alpha < 0,4$** .
- d. 3 est atteint en -1 (maximum local) et en 2 (borne droite). Sur $[-2 ; -1]$ f croît de -1 à 3 : une solution, $x = -1$; sur $[-1 ; 1]$ f est ≤ 3 et ne vaut 3 qu'en -1 ; sur $]1 ; 2]$, f croît de -1 à 3 : une solution, $x = 2$. Donc **2 solutions**. Vérification : $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$, de racines -1 (double) et 2. ✓

17 La boîte de volume maximal ★★★

- a. Le côté du carré de base vaut $24 - 2x \geq 0$, donc $x \in [0 ; 12]$.
- b. La base est un carré de côté $(24 - 2x)$ cm et la hauteur est x cm : $V(x) = x(24 - 2x)^2$.
- c. $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$, donc $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48) = 12(x - 4)(x - 12) = 12(12 - x)(4 - x)$. Sur $[0 ; 12]$, $12 - x \geq 0$: V' a le signe de $4 - x$, positif sur $[0 ; 4[$ et négatif sur $]4 ; 12]$. $V(4) = 4 \times 16^2 = 1\,024$:

x	0		4		12
V'(x)		+	0	-	
V(x)	0	↗	1024	↘	0

- d. Le volume est maximal pour $x = 4$: la boîte mesure 16 cm $\times$ 16 cm $\times$ 4 cm et son volume est **1 024 cm³**.

18 La canette économique ★★★

- a. $\pi r^2 h = 500$ donne $h = 500/\pi r^2$. Alors $2\pi r h = 2\pi r \times 500/\pi r^2 = 1000/r$, d'où $S(r) =$

$$2\pi r^2 + 1000/r.$$

b. $S'(r) = 4\pi r - 1000/r^2 = 4\pi r \times r^2 - 1000/r^2 = 4\pi r^3 - 1000/r^2.$

- c. Le dénominateur r^2 est positif. $4\pi r^3 - 1\,000 > 0 \Leftrightarrow r^3 > 250/\pi \Leftrightarrow r > r_0$ avec $r_0 = (250/\pi)^{1/3} \approx 4,30$ (la fonction cube est strictement croissante sur $[0; +\infty[$). Donc $S' < 0$ sur $]0; r_0[$ et $S' > 0$ sur $]r_0; +\infty[$:

x	0		r_0		$+\infty$
$S'(r)$		-	0	+	
$S(r)$		$\searrow$	$S(r_0)$	$\nearrow$	

- d. S est minimale pour $r = r_0 \approx 4,30$ cm. Alors $h = 500/\pi r_0^2 \approx 8,60$ cm et $S(r_0) \approx 2\pi \times 4,30^2 + 1000/4,30 \approx 348,73$ cm² (valeur exacte non arrondie : 348,734...). Comme $\pi r_0^3 = 250$, on a $h = 500/\pi r_0^2 = 2 \times 250/\pi r_0^2 = 2r_0$: la hauteur est exactement égale au **diamètre** de la canette.

19 Étude complète d'une fonction rationnelle ★★★

- a. Avec $u = x^2$ et $v = x - 2$: $u' = 2x$, $v' = 1$. $f'(x) = 2x(x - 2) - x^2/(x - 2)^2 = 2x^2 - 4x - x^2/(x - 2)^2 = x^2 - 4x/(x - 2)^2 = x(x - 4)/(x - 2)^2.$
- b. Le dénominateur $(x - 2)^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Le signe de f' est celui de $x(x - 4)$: positif pour $x < 0$, négatif sur $]0; 4[$ (en excluant 2), positif pour $x > 4$. $f(0) = 0$ et $f(4) = 16/2 = 8$:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	$\parallel$	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	8	$\nearrow$	

- c. f' change de signe de + à - en 0 : **maximum local 0** en $x = 0$; de - à + en 4 : **minimum local 8** en $x = 4$. Il n'y a pas de contradiction : un extremum local ne compare f qu'aux valeurs voisines. Ici, la valeur interdite 2 sépare les deux morceaux de la courbe : le maximum local appartient au premier morceau, le minimum local au second, et rien ne les relie.

20 Problème de bénéfice ★★★

- a. $B'(x) = -6x^2 + 42x - 36 = -6(x^2 - 7x + 6) = -6(x - 1)(x - 6).$
- b. Racines 1 et 6, coefficient $-6 < 0$: B' est négatif sur $[0; 1[$, positif sur $]1; 6[$, négatif sur $]6; 10]$. $B(0) = 0$; $B(1) = -2 + 21 - 36 = -17$; $B(6) = -432 + 756 - 216 = 108$; $B(10) = -2\,000 + 2\,100 - 360 = -260$:

x	0		1		6		10
$B'(x)$		-	0	+	0	-	
$B(x)$	0	$\searrow$	-17	$\nearrow$	108	$\searrow$	-260

- c. Le maximum de B sur $[0; 10]$ est 108 (on compare 0 ; -17 ; 108 ; -260), atteint pour $x = 6$: il faut fabriquer **600 objets** par jour pour un bénéfice maximal de **10**

800 € (108 centaines d'euros).

- d. On factorise x : $B(x) = x(-2x^2 + 21x - 36)$. Le trinôme $-2x^2 + 21x - 36$ a pour discriminant $441 - 288 = 153 > 0$ et pour racines **21** - $\sqrt{153}/4 \approx 2,16$ et **21** + $\sqrt{153}/4 \approx 8,34$; il est positif entre elles (coefficient dominant négatif). Pour $x > 0$, $B(x) > 0 \Leftrightarrow 2,16 < x < 8,34$ environ. L'entreprise gagne de l'argent si elle fabrique **entre 216 et 834 objets** par jour (environ).

21 Le rectangle sous la parabole ★★★

- a. $M(x ; 9 - x^2)$ et $M'(-x ; 9 - x^2)$ sont distants de $2x$: la largeur est $2x$. La hauteur est $9 - x^2$. Donc $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$.
- b. $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2) = 6(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. Sur $[0 ; 3]$, $\sqrt{3} + x > 0$: A' a le signe de $\sqrt{3} - x$, positif sur $[0 ; \sqrt{3}[$ et négatif sur $]\sqrt{3} ; 3]$. $A(0) = 0$, $A(3) = 54 - 54 = 0$ et $A(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \times (9 - 3) = 12\sqrt{3}$:

x	0		$\sqrt{3}$		3
A'(x)		+	0	-	
A(x)	0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0

- c. L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3} \approx \mathbf{1,73}$ et vaut **$12\sqrt{3} \approx 20,78$** unités d'aire. Le rectangle correspondant mesure $2\sqrt{3} \approx 3,46$ de large sur 6 de haut.