

Variations et extremums des fonctions

Cours de maths - 1ère

Quand un entrepreneur cherche son bénéfice maximal ou qu'un ingénieur veut utiliser le moins de matière possible, ils se posent la même question : **où la courbe d'une fonction atteint-elle son point le plus haut ou le plus bas ?** Cette année, tu as un outil puissant pour répondre : la **dérivée**. Dans ce chapitre, tu apprends à lire son signe pour en déduire les **variations**, à dresser un **tableau de variations** complet, à trouver les **extremums**, puis à résoudre des **problèmes d'optimisation**.

1. Rappels : dérivées et signe d'une expression

Dans tout le chapitre, f est une fonction **dérivable** sur un intervalle I . Son nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Dérivées à connaître Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous réels k, a, b :

- $(k)' = 0$; $(x)' = 1$; $(x^n)' = nx^{n-1}$ (en particulier $(x^2)' = 2x$ et $(x^3)' = 3x^2$) ; $(1/x)' = -1/x^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $(u + v)' = u' + v'$; $(k \cdot u)' = k \cdot u'$.
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ là où v ne s'annule pas.

Exemple Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$. On dérive terme à terme : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il faut presque toujours **factoriser** cette dérivée. Rappel pour un trinôme $ax^2 + bx + c$ avec deux racines $x_1 < x_2$: il est du **signe de a à l'extérieur** des racines et du **signe de $-a$ entre** les racines, et il s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple $6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Les racines sont -1 et 2 , et $a = 6 > 0$: le trinôme est positif pour $x < -1$ ou $x > 2$, négatif entre -1 et 2 .

Astuce Une dérivée qui est un produit ou un quotient de facteurs se traite avec un **tableau de signes** : une ligne par facteur, puis une ligne pour le résultat (règle des signes). Un carré est toujours positif ou nul ; un dénominateur qui est un carré ne change donc jamais le signe.

2. Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème (admis) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

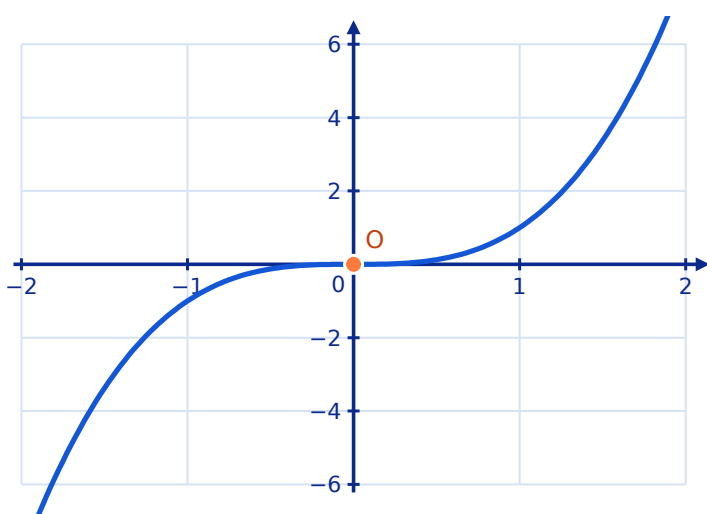
Fiche en ligne : maths-facile.eu/variations-et-extremums-des-fonctions-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur maths-facile.eu · page 1/7

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est **croissante** sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est **décroissante** sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est **constante** sur I .

Réciproquement, une fonction dérivable croissante sur I a une dérivée positive ou nulle sur I .

L'idée est géométrique : si toutes les tangentes « montent » (pente positive), la courbe monte. Quand la dérivée est **strictement** positive sur I , la fonction est **strictement croissante** (même chose avec « strictement décroissante »).

Piège : la dérivée peut s'annuler sans que le sens change Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 0$. Pourtant f est croissante sur tout $\mathbb{R}$: la tangente est horizontale en 0, mais la courbe continue de monter (elle « traverse » sa tangente).



Ce qui compte, ce n'est pas que f' s'annule, mais **qu'elle change de signe** ou pas.

Méthode : variations d'une fonction dérivable

1. Préciser l'**ensemble de définition** (ou l'intervalle d'étude) et vérifier que f est dérivable.
2. **Calculer $f'(x)$** et la mettre sous forme factorisée.
3. Étudier le **signe de $f'(x)$** (tableau de signes si besoin).
4. En déduire le **sens de variation** de f sur chaque intervalle.
5. Dresser le **tableau de variations** en calculant les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule.

3. Étude complète d'une fonction polynôme

Appliquons la méthode à $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ sur l'intervalle $[-2 ; 3,5]$.

Exemple résolu

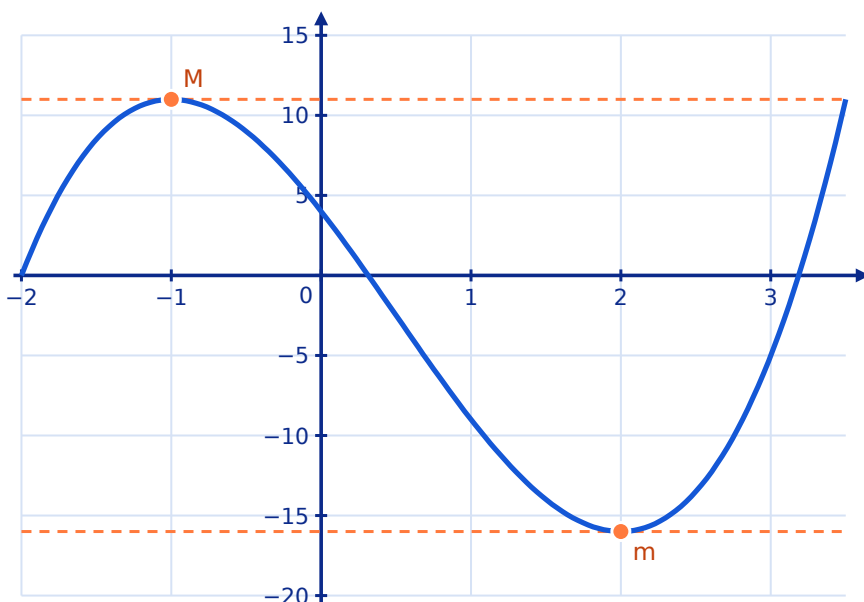
Dérivée. f est un polynôme, donc dérivable sur $[-2 ; 3,5]$, et $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$.

Signe. Les racines sont -1 et 2 ; le coefficient 6 est positif. Donc $f'(x) > 0$ sur $[-2 ; -1[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 ; 3,5]$.

Valeurs. $f(-2) = -16 - 12 + 24 + 4 = 0$; $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 4 = 11$; $f(2) = 16 - 12 - 24 + 4 = -16$; $f(3,5) = 85,75 - 36,75 - 42 + 4 = 11$.

Tableau.

x	-2		-1		2		3,5
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	0	↗	11	↘	-16	↗	11



On lit dans ce tableau : f est strictement croissante sur $[-2 ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; 3,5]$. Les points $M(-1 ; 11)$ et $m(2 ; -16)$ de la courbe ont une tangente horizontale.

Astuce Dans un tableau de variations, la flèche du bas va de la valeur de gauche vers la valeur de droite. Vérifie toujours la **cohérence** : une flèche ↗ doit aller d'une valeur plus petite vers une valeur plus grande, une flèche ↘ l'inverse. Si ce n'est pas le cas, tu t'es trompé dans un calcul.

4. Extremums locaux et extremums globaux

Maximum et minimum Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I .

- f admet un **maximum global** (ou absolu) sur I en a si $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I .

Le **minimum global** se définit avec $f(x) \geq f(a)$.

- f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel $f(x) \leq f(a)$; de même pour un **minimum local**.
- Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

Un extremum local est donc le point le plus haut (ou le plus bas) « dans son voisinage » ; un extremum global est le plus haut (ou le plus bas) sur **tout** l'intervalle. Un extremum global est une valeur **de f** (une ordonnée) ; on précise aussi **en quelle abscisse** il est atteint.

Théorème : extremum et dérivée Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un point à l'intérieur de I (pas une borne).

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a : un maximum si f' passe de $+$ à $-$, un minimum si f' passe de $-$ à $+$.

Démonstration de la première propriété. Supposons un maximum local en a : pour h non nul et assez petit, $f(a + h) \leq f(a)$. Pour $h > 0$, le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est négatif ou nul, donc sa limite $f'(a)$ vérifie $f'(a) \leq 0$. Pour $h < 0$, ce même taux est positif ou nul (numérateur négatif, dénominateur négatif), donc $f'(a) \geq 0$. Les deux inégalités imposent $f'(a) = 0$. Le raisonnement pour un minimum est identique.

La réciproque est fausse $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour avoir un extremum : le contre-exemple est $f(x) = x^3$ en $a = 0$ (la dérivée ne change pas de signe). De plus, un extremum situé à une **borne** de l'intervalle n'a aucune raison d'avoir une dérivée nulle.

Méthode : extremums globaux sur un intervalle $[a ; b]$ Dresse le tableau de variations, puis **compare toutes les valeurs** écrites sur la ligne de f : celles aux bornes et celles aux extremums locaux. La plus grande est le maximum global, la plus petite le minimum global.

Exemple Pour la fonction f de la partie 3 sur $[-2 ; 3,5]$, les valeurs du tableau sont 0 ; 11 ; -16 ; 11. Le **maximum** de f sur $[-2 ; 3,5]$ est 11 : il est atteint **deux fois**, en $x = -1$ et en $x = 3,5$. Le **minimum** est -16, atteint en $x = 2$. Remarque : l'extremum global en 3,5 est atteint à une borne, alors que $f'(3,5) = 6 \times 4,5 \times 1,5 = 40,5$ est loin d'être nul.

5. Fonctions rationnelles simples

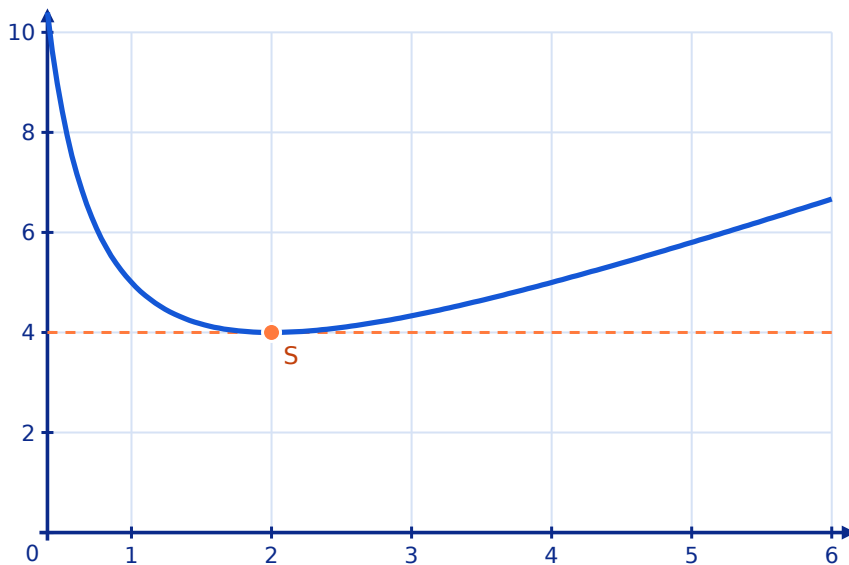
Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes. Elle est dérivable là où le dénominateur ne s'annule pas, et on la dérive avec la formule du quotient $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Le signe de la dérivée est alors celui de son **numérateur**, puisque le dénominateur v^2 est strictement positif.

Exemple 1 : une fonction homographique Soit $h(x) = 3x - \frac{1}{x} + 2$ sur $] -2 ; +\infty[$. Avec $u = 3x - 1$ et $v = x + 2$, on a $u' = 3$ et $v' = 1$, donc $h'(x) = \frac{3(x + 2) - (3x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2}$. Cette dérivée est strictement positive : h est **strictement croissante** sur $] -2 ; +\infty[$. Elle n'a aucun extremum local.

Exemple 2 : somme d'une variable et de son inverse Soit $g(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. On a $g'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$: $g'(x)$ a le signe de $x - 2$. Donc g est décroissante sur $]0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$. Avec $g(2) = 2 + 2 = 4$, on obtient :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Le **minimum** de g sur $]0 ; +\infty[$ est donc 4, atteint en $x = 2$ (par exemple $g(1) = 5$ et $g(4) = 5$ sont plus grands).



Valeur interdite Si le dénominateur s'annule en $x = a$, la fonction n'est pas définie en a : on **sépare** l'étude en deux intervalles, et on met une double barre « $\parallel$ » dans le tableau à l'abscisse a . Ne dis jamais « f est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ » : une fonction peut être décroissante sur chacun des intervalles sans l'être sur leur réunion.

6. Utiliser les variations

Démontrer une inégalité. Pour montrer que $f(x) \geq m$ sur un intervalle, on montre que m est le **minimum** de f sur cet intervalle (ou que $f - m$ admet pour minimum 0).

Exemple Montrons que $x^3 \geq 3x - 2$ pour tout $x \geq 0$. On pose $q(x) = x^3 - 3x + 2$; il faut prouver $q(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$. On a $q'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Pour $x \geq 0$, $x + 1 > 0$, donc q' a le signe de $x - 1$. Ainsi q décroît sur $[0 ; 1]$ et croît sur $[1 ; +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	↘	0	↗	

Le minimum de q est $q(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc $q(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Compter les solutions d'une équation $f(x) = k$. On admet (la justification complète viendra en Terminale) que si f est dérivable et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$, l'équation $f(x) = k$ a **une seule solution** dans $[a ; b]$ dès que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, et aucune sinon. On l'applique sur chaque intervalle de monotonie du tableau.

Exemple Avec le tableau de la partie 3 (valeurs 0 ; 11 ; -16 ; 11) : l'équation $f(x) = 5$ a **3 solutions** dans $[-2 ; 3,5]$ (5 est entre 0 et 11, entre 11 et -16, entre -16 et 11) ; l'équation $f(x) = -20$ n'en a **aucune** car $-20 < -16$; l'équation $f(x) = 11$ en a **deux**, en -1 et en 3,5.

Retrouver le signe de f' avec une courbe. Réciproquement, sur la courbe de f , là où elle monte la dérivée est positive, là où elle descend elle est négative, et elle s'annule aux sommets et aux creux (tangente horizontale).

7. Problèmes d'optimisation

Méthode : résoudre un problème d'optimisation

1. **Choisir la variable x** et préciser le **domaine** (valeurs possibles dans le contexte).
2. **Exprimer la grandeur à optimiser** (aire, volume, coût, bénéfice...) comme fonction $f(x)$.
3. **Étudier f** : dérivée, signe, tableau de variations sur le domaine.
4. **Conclure par une phrase** qui répond à la question posée, avec l'unité et les dimensions correspondantes.

Exemple résolu : la boîte sans couvercle On découpe dans les quatre coins d'un carton carré de 30 cm de côté quatre petits carrés de côté x cm, puis on replie pour former une boîte sans couvercle. Quel x donne le volume maximal ?

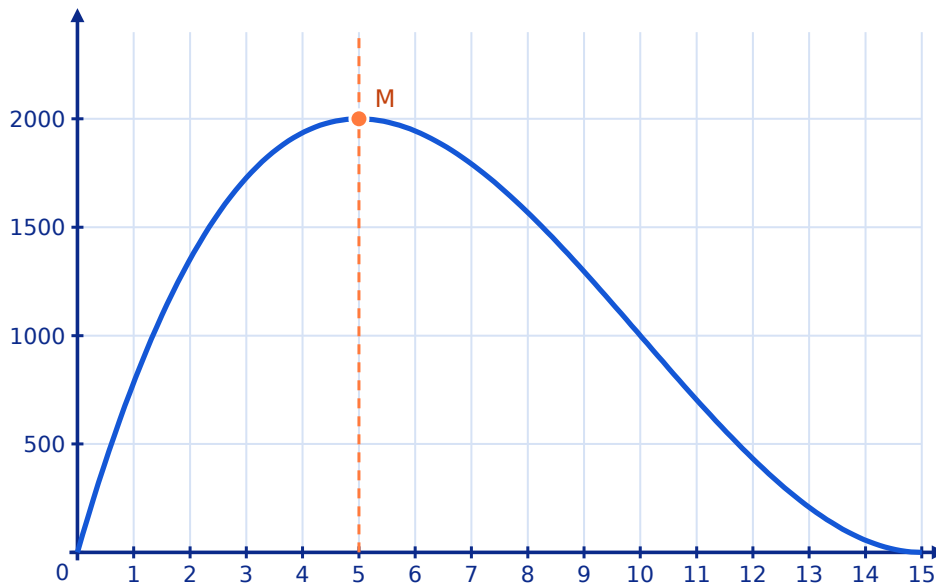
1. Domaine. Il faut $2x \leq 30$, donc $x \in [0 ; 15]$.

2. Volume. La base est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur vaut x : $V(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

3. Étude. $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(15 - x)(5 - x) = 12(x - 5)(x - 15)$. Sur $[0 ; 15]$, le facteur $x - 15$ est négatif ou nul ; $V'(x)$ est donc du signe de $5 - x$: positif sur $[0 ; 5[$, négatif sur $]5 ; 15]$. Avec $V(0) = 0$, $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ et $V(15) = 0$:

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$	0	↗	2000	↘	0

4. Conclusion. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm : on obtient une boîte de base 20 cm × 20 cm, de hauteur 5 cm, de volume **2 000 cm³**.



Pièges classiques Oublier le domaine (un côté ne peut pas être négatif) ; s'arrêter à « $V'(x) = 0$ » sans le tableau (rien ne prouve alors que c'est un maximum) ; répondre par la valeur de x alors qu'on te demande le volume (ou l'inverse). Relis toujours la question.

À retenir

- $f' \geq 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ croissante ; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante ; $f' = 0 \Rightarrow f$ constante.
- Pour étudier les variations : dériver, **factoriser**, étudier le signe de f' , dresser le tableau avec les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule.
- Dérivée du quotient $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$: son signe est celui du numérateur $u'v - uv'$.
- Un extremum local en a (à l'intérieur de l'intervalle) impose $f'(a) = 0$; mais $f'(a) = 0$ ne suffit pas (x^3 en 0). Il faut que f' **change de signe**.
- Extremums globaux sur $[a ; b]$: comparer les valeurs aux bornes et aux extremums locaux ; une valeur extrême peut être atteinte à une borne.
- Pour montrer $f(x) \geq m$, montrer que m est le minimum de f .
- Optimisation : variable et domaine, fonction, tableau de variations, phrase de conclusion avec l'unité.