

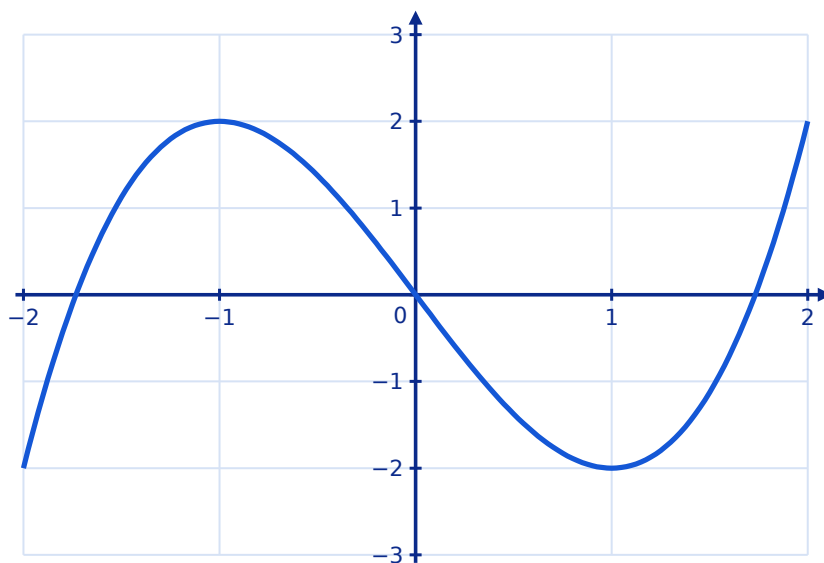
Variations et extremums des fonctions

Exercices de maths - 1ère

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Lire les variations sur une courbe ★★★

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $[-2 ; 2]$.



- Dresse le tableau de variations de f (valeurs lues sur la courbe).
- Quel est le maximum de f sur $[-2 ; 2]$? Pour quelles valeurs de x est-il atteint ?
- Combien de solutions l'équation $f(x) = 1$ admet-elle ?

2 Un trinôme du second degré ★★★

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule $f'(x)$.
- Étudie le signe de $f'(x)$.
- Dresse le tableau de variations de f .
- f admet-elle un extremum ? Lequel ?

3 Du signe de la dérivée aux variations ★★★

Soit f une fonction dérivable sur $[-3 ; 6]$ dont la dérivée est $f'(x) = (x - 4)(x + 1)$.

- a. Dresse le tableau de signes de $f'(x)$.
- b. Dédus-en les variations de f sur $[-3 ; 6]$.
- c. Compare, sans les calculer, $f(0)$ et $f(2)$; puis $f(5)$ et $f(6)$; puis $f(-3)$ et $f(-2)$.

4 Un polynôme de degré 3 ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ sur $\mathbb{R}$.

- a. Montre que $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$.
- b. Dresse le tableau de variations de f .
- c. Donne les extremums locaux de f .
- d. f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}$? (Calcule $f(10)$.)

5 Tangentes horizontales ★★★

Soit $g(x) = x^3 - 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.

- a. Détermine les points de la courbe de g où la tangente est horizontale.
- b. Étudie le signe de $g'(x)$ et précise la nature de chacun de ces points (maximum local, minimum local ?).

6 Une fonction homographique ★★★

Soit $k(x) = 2x + \frac{1}{x} - 3$ sur $]3 ; +\infty[$.

- a. Montre que $k'(x) = -\frac{7}{(x - 3)^2}$.
- b. Dédus-en le sens de variation de k .
- c. Range dans l'ordre croissant $k(4)$, $k(5)$ et $k(13)$ sans les calculer, puis vérifie en les calculant.

7 Vrai ou faux ? Justifie. ★★★

Dans chaque cas, f est une fonction dérivable. Dis si l'affirmation est vraie ou fausse et justifie.

- a. « Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a . »
- b. « Si f est croissante sur un intervalle I , alors $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I . »
- c. « Si f' est positive sur $[0 ; 1[$ et négative sur $]1 ; 2]$ (f dérivable sur $[0 ; 2]$), alors f admet un maximum local en 1. »
- d. « Si f admet un maximum sur $[0 ; 1]$, alors sa dérivée s'annule en ce point. »
- e. « Si f admet un minimum local en 2 (à l'intérieur de son intervalle de définition), la courbe de f a une tangente horizontale au point d'abscisse 2. »

8 Maximum et minimum sur un intervalle ★★★

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ sur $[0 ; 3]$.

- Montre que $f'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$.
- Dresse le tableau de variations de f .
- Donne les extremums locaux de f , puis son maximum et son minimum sur $[0 ; 3]$ en précisant où ils sont atteints.

9 Un polynôme de degré 4 ★★★

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que $f'(x) = 4x(x - 1)(x + 1)$.
- Dresse le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f .
- Montre que, pour tout réel x , $f(x) - 2 = (x^2 - 1)^2$. Déduis-en le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

10 Un quotient avec un carré ★★★

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $[-3 ; 3]$.

- Montre que $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f .
- Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[-3 ; 3]$?

11 Le rectangle de périmètre minimal ★★★

On cherche, parmi tous les rectangles d'aire 25 m^2 , celui de plus petit périmètre. On note x (en m) la longueur d'un côté, avec $x > 0$.

- Exprime l'autre côté en fonction de x , puis montre que le périmètre est $P(x) = 2x + \frac{50}{x}$.
- Montre que $P'(x) = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2}$.
- Dresse le tableau de variations de P sur $]0 ; +\infty[$.
- Conclus : quelles sont les dimensions du rectangle de périmètre minimal et quel est ce périmètre ?

12 Retrouver une parabole ★★★

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que la courbe de f passe par le point $A(0 ; 1)$ et admet au point S d'abscisse 2 une tangente horizontale, avec $f(2) = 5$.

- Écris trois équations traduisant ces informations (utilise $f'(2) = 0$).

- b. Détermine a , b et c .
- c. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et vérifie que $f(2) = 5$ est bien un maximum.

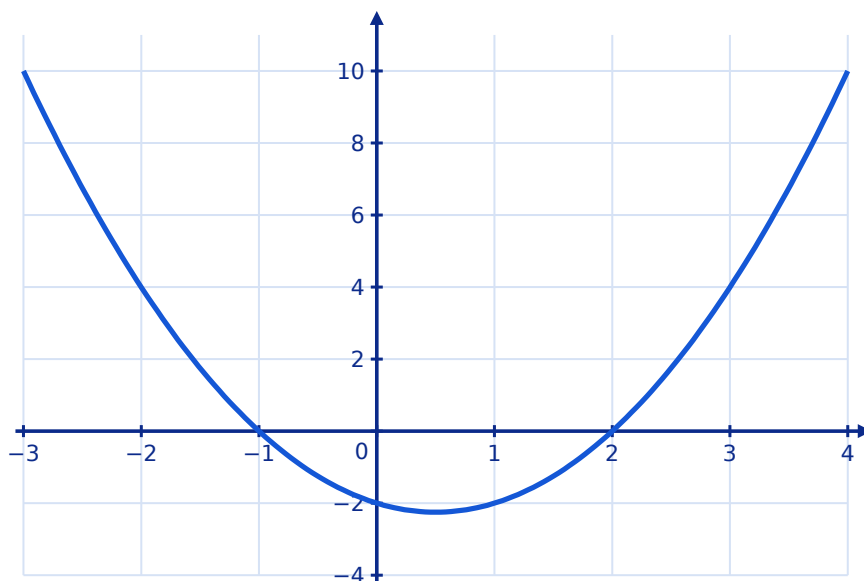
13 Retrouver les coefficients d'un polynôme ★★★

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, où a et b sont deux réels. La courbe de f admet une tangente horizontale aux points d'abscisses -1 et 3 .

- a. Calcule $f'(x)$ en fonction de a et b . Écris les équations $f'(-1) = 0$ et $f'(3) = 0$.
- b. Résous le système et détermine a et b .
- c. Dresse le tableau de variations de f sur $[-3 ; 5]$ avec les valeurs aux bornes.

14 Lire la courbe de la dérivée ★★★

La courbe ci-dessous est celle de la **dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $[-3 ; 4]$ (et non celle de f).



- a. Lis les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$, puis dresse le tableau de signes de f' .
- b. Dédus-en le tableau de variations de f (sans valeurs numériques).
- c. f admet-elle des extremums locaux ? Où ?
- d. Compare $f(0)$ et $f(1)$, puis $f(3)$ et $f(4)$.

15 Une inégalité classique ★★★

Soit $g(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Calcule $g'(x)$ et montre que $g'(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$.
- b. Dresse le tableau de variations de g .

- c. Dédus-en que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- d. Application : un nombre positif et son inverse ont une somme d'au moins 2. Pour quel nombre la somme vaut-elle exactement 2 ?

16 Combien de solutions ? ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2 ; 2]$.

- a. Dresse le tableau de variations de f .
- b. Dédus-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[-2 ; 2]$ et situe-les chacune entre deux entiers consécutifs.
- c. À la calculatrice, encadre la solution α comprise entre 0 et 1 à 0,1 près.
- d. Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ admet-elle ? Donne-les en résolvant $x^3 - 3x - 2 = 0$ (remarque que -1 est solution).

17 La boîte de volume maximal ★★★

On dispose d'une plaque carrée de 24 cm de côté. On découpe dans chaque coin un carré de côté x cm et on replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

- a. Entre quelles valeurs x peut-il varier ?
- b. Montre que le volume est $V(x) = x(24 - 2x)^2$.
- c. Montre que $V'(x) = 12(12 - x)(4 - x)$ puis dresse le tableau de variations de V .
- d. Quel x donne le volume maximal ? Donne alors les dimensions de la boîte et son volume.

18 La canette économique ★★★

Une entreprise fabrique des canettes cylindriques de volume 500 cm^3 . On note r (en cm) le rayon de la base, avec $r > 0$, et h la hauteur. On rappelle que le volume est $\pi r^2 h$ et que l'aire totale est $2\pi r^2 + 2\pi r h$.

- a. Exprime h en fonction de r , puis montre que l'aire totale de métal est $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$.
- b. Montre que $S'(r) = 4\pi r^3 - \frac{1000}{r^2}$.
- c. Résous $4\pi r^3 - 1000 > 0$ et déduis-en le tableau de variations de S sur $]0 ; +\infty[$.
- d. Pour quelle valeur de r la quantité de métal est-elle minimale ? Donne r , h et S (à 0,01 près) et compare h à $2r$.

19 Étude complète d'une fonction rationnelle ★★★

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- a. Montre que $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

- Dresse le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f (avec une double barre en 2).
- Détermine les extremums locaux de f . Surprise : le maximum local est plus petit que le minimum local. Explique pourquoi ce n'est pas contradictoire.

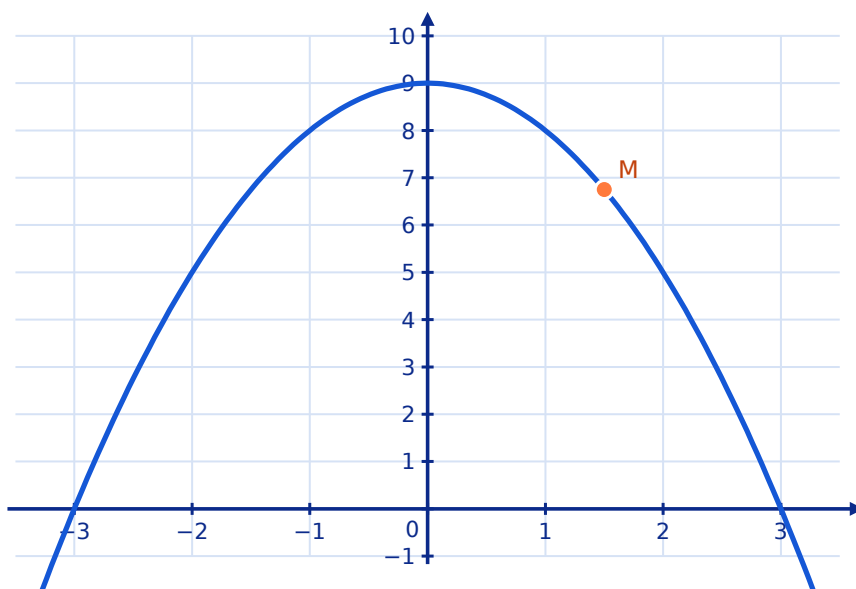
20 Problème de bénéfice ★★★

Une entreprise fabrique x centaines d'objets par jour, avec $x \in [0 ; 10]$. Son bénéfice quotidien, en centaines d'euros, est $B(x) = -2x^3 + 21x^2 - 36x$.

- Montre que $B'(x) = -6(x - 1)(x - 6)$.
- Dresse le tableau de variations de B sur $[0 ; 10]$.
- Combien d'objets faut-il fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?
- Montre que $B(x) = x(-2x^2 + 21x - 36)$ et résous $B(x) > 0$ (arrondis à 0,01 près, calculatrice autorisée). Interprète.

21 Le rectangle sous la parabole ★★★

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole P d'équation $y = 9 - x^2$. Pour un réel x de $[0 ; 3]$, on place le point $M(x ; 9 - x^2)$ sur P et on construit le rectangle dont les sommets sont M , son symétrique M' par rapport à l'axe des ordonnées, et leurs projetés sur l'axe des abscisses.



- Montre que l'aire du rectangle est $A(x) = 18x - 2x^3$.
- Étudie les variations de A sur $[0 ; 3]$.
- Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Donne la valeur exacte de ce maximum puis une valeur approchée à 0,01 près.