

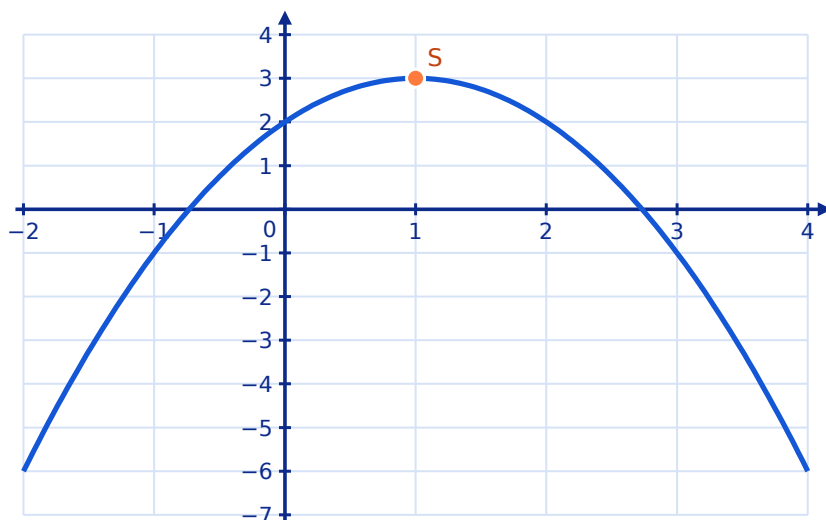
Variations et extremums

Exercices de maths - 2de

23 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Lire les variations sur une courbe ★★★

Voici la courbe d'une fonction q définie sur $[-2 ; 4]$.



- Donne le sens de variation de q sur $[-2 ; 1]$, puis sur $[1 ; 4]$.
- Dresse le tableau de variations de q .
- Quel est le maximum de q sur $[-2 ; 4]$? En quelle valeur est-il atteint ?
- Compare $q(-1)$ et $q(0)$, puis $q(2)$ et $q(3)$.

2 Exploiter un tableau de variations ★★★

Une fonction f est définie sur $[-5 ; 6]$ par le tableau de variations suivant.

x	-5		-1		3		6
$f(x)$	2	↘	-3	↗	4	↘	0

- Donne les intervalles sur lesquels f est croissante, puis ceux sur lesquels elle est décroissante.
- Donne le maximum et le minimum de f sur $[-5 ; 6]$, et les valeurs où ils sont atteints.
- Compare $f(-4)$ et $f(-2)$, puis $f(0)$ et $f(2)$.

d. Peut-on comparer $f(-3)$ et $f(5)$? Justifie.

3 Comparer des images sans calculer ★★★

Compare, sans calculatrice, en justifiant avec les variations d'une fonction de référence :

- a. $(-4,2)^2$ et $(-3,9)^2$;
- b. $2,5^3$ et $2,4^3$;
- c. $(-1,7)^3$ et $(-1,6)^3$;
- d. $0,3^2$ et $(-0,4)^2$.

4 Fonctions affines ★★★

Pour chaque fonction, donne le sens de variation sur $\mathbb{R}$: $f(x) = -3x + 5$; $g(x) = 0,5x - 2$; $h(x) = 7$. Puis :

- a. compare $f(\sqrt{2})$ et $f(1,5)$;
- b. compare $g(-1/3)$ et $g(-0,3)$.

5 Vrai ou faux ? (fonctions de référence) ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifie.

- a. La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}$.
- b. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
- c. La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}$.
- d. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- e. La fonction $x \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- f. Le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ est 0.

6 Lire des extremums dans un tableau ★★★

La fonction g est définie sur $[0 ; 10]$ par ce tableau de variations.

x	0		2		6		10
g(x)	1	↗	6	↘	-2	↗	3

- a. Quel est le maximum de g ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- b. Quel est le minimum de g ? Pour quelle valeur ?
- c. L'équation $g(x) = 7$ a-t-elle des solutions ?
- d. Combien de solutions a l'équation $g(x) = 0$?

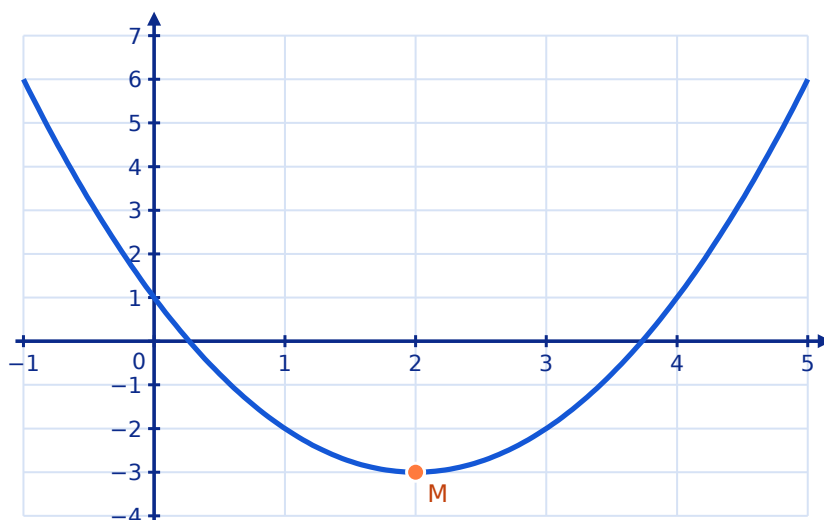
7 Inverse et racine carrée ★★★

Compare, en justifiant :

- a. $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$;
- b. $\frac{1}{2,5}$ et $\frac{1}{2,9}$;
- c. $\frac{1}{-0,5}$ et $\frac{1}{-0,3}$;
- d. $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{3}$.

8 Courbe, minimum et nombre de solutions ★★★

Voici la courbe de la fonction r définie par $r(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $[-1 ; 5]$.



- a. Dresse le tableau de variations de r .
- b. Donne le minimum de r et l'endroit où il est atteint.
- c. Pour chaque valeur de k , donne le nombre de solutions de $r(x) = k$: $k = -3$; $k = 0$; $k = -4$; $k = 6$; $k = 7$.
- d. Vérifie par le calcul que $r(x) = 6$ a bien pour solutions -1 et 5 .

9 Encadrer des images ★★★

- 1. Une fonction f est décroissante sur $[-4 ; 1]$, avec $f(-4) = 6$ et $f(1) = -2$. Encadre $f(x)$ lorsque $x \in [-4 ; 1]$.
- 2. On sait aussi que $f(-3) = 3$ et $f(0) = -1$. Encadre $f(x)$ lorsque $x \in [-3 ; 0]$.
- 3. Une fonction g est croissante sur $[2 ; 8]$ avec $g(4) = 0$ et $g(6) = 3$. Encadre $g(x)$ pour $x \in [4 ; 6]$. Que peux-tu dire de l'équation $g(x) = 1$ sur $[4 ; 6]$, sachant que g est strictement croissante et sans coupure ?

10 Une parabole décalée ★★★

Soit $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ pour tout réel x .

- Montre que $f(x) \geq 1$ pour tout x . Quel est le minimum de f ?
- Donne le sens de variation de f sur $]-\infty ; 2]$, puis sur $[2 ; +\infty[$.
- Calcule $f(-1)$ et $f(4)$. Compare-les, puis explique pourquoi on ne peut pas les comparer avec le seul sens de variation.

11 Trouver un maximum avec une écriture $5 - (\dots)^2$ ★★★

Soit $g(x) = 5 - (x + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que $g(x) \leq 5$ pour tout x et indique pour quelle valeur de x on a $g(x) = 5$.
- Quel est le maximum de g ?
- Dresse le tableau de variations de g sur $[-4 ; 2]$. (Calcule $g(-4)$, $g(-1)$ et $g(2)$.)
- L'équation $g(x) = 6$ a-t-elle des solutions ?

12 Démontrer qu'une fonction affine est décroissante ★★★

Soit $f(x) = -2x + 7$ sur $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- Calcule $f(a) - f(b)$ et simplifie.
- Détermine son signe et conclus sur le sens de variation de f .

13 Démontrer les variations de $x^2 + 6x - 1$ ★★★

Soit $g(x) = x^2 + 6x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

- Vérifie que $g(x) = (x + 3)^2 - 10$.
- Déduis-en le minimum de g et la valeur où il est atteint.
- Pour $a < b$: développe et factorise $g(a) - g(b)$ pour montrer que $g(a) - g(b) = (a - b)(a + b + 6)$.
- Montre que g est croissante sur $[-3 ; +\infty[$ puis décroissante sur $]-\infty ; -3]$.

14 Rectangle de périmètre donné ★★★

Un jardinier veut un enclos rectangulaire de périmètre 40 m. Il note x la longueur d'un côté (en m).

- Entre quelles valeurs x peut-il varier ? Exprime l'autre côté puis l'aire $A(x)$.
- Montre que $A(x) = 100 - (x - 10)^2$.
- Dresse le tableau de variations de A sur $[0 ; 20]$.
- Quelle forme faut-il choisir pour que l'aire soit maximale ? Donne cette aire.

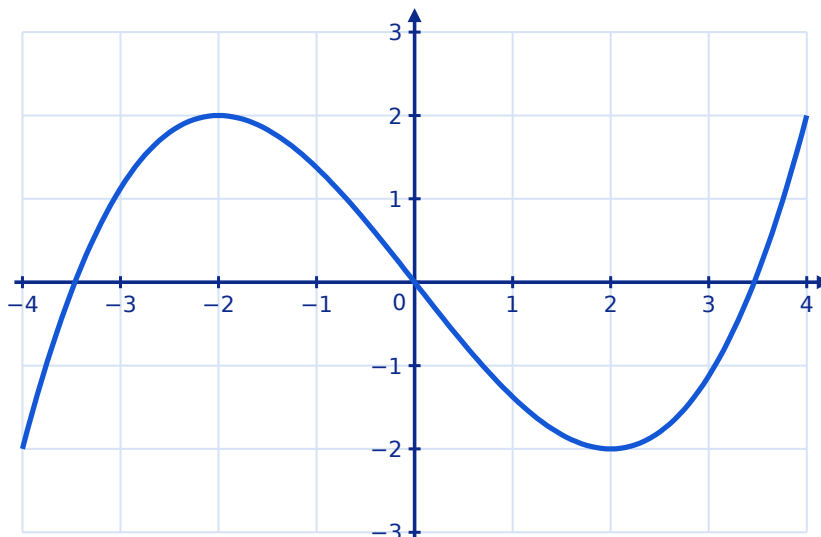
15 Recette d'un commerçant ★★★

Une boutique modélise sa recette journalière par $R(p) = -2p^2 + 24p$, en centaines d'euros, où p est le prix de vente d'un article en euros, avec $1 \leq p \leq 10$.

- Vérifie que $R(p) = 72 - 2(p - 6)^2$.
- Dresse le tableau de variations de R sur $[1 ; 10]$.
- Pour quel prix la recette est-elle maximale ? Quel est son montant ?
- Quel est le minimum de R sur $[1 ; 10]$? Pour quel prix est-il atteint ?
- Pour quels prix la recette dépasse-t-elle 6 400 € (soit $R(p) \geq 64$) ?

16 Étude complète sur une courbe ★★★

Voici la courbe d'une fonction p définie sur $[-4 ; 4]$. On lit : $p(-4) = -2$, $p(-2) = 2$, $p(2) = -2$ et $p(4) = 2$.



- Dresse le tableau de variations de p .
- Donne ses extremums et les valeurs où ils sont atteints.
- Compare $p(-3)$ et $p(-2,5)$, puis $p(0)$ et $p(1)$.
- Combien de solutions ont les équations $p(x) = 0$, $p(x) = 2$ et $p(x) = 2,5$?
- On admet que $p(x) = (x^3 - 12x) \div 8$. Calcule $p(-3)$ et $p(0)$ et vérifie la comparaison précédente.

17 Opérations sur les fonctions de référence ★★★

- Donne le sens de variation de $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ sur $]0 ; +\infty[$. Compare $f(0,5)$ et $f(4)$.
- Donne le sens de variation de $g(x) = -3\sqrt{x} + 1$ sur $[0 ; +\infty[$. Quel est son maximum ? Compare $g(2)$ et $g(5)$, puis dresse son tableau sur $[0 ; 9]$.
- Donne le sens de variation de $h(x) = 2x^3 + 4$ sur $\mathbb{R}$.

18 Le ballon ★★★

Un ballon est lancé verticalement. Sa hauteur (en m) à l'instant t (en s) est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ pour $t \in [0 ; 4]$.

- Montre que $h(t) = 21 - 5(t - 2)^2$.
- En déduis le maximum de h et l'instant où il est atteint.
- Dresse le tableau de variations de h sur $[0 ; 4]$.
- Pendant combien de temps le ballon se trouve-t-il à une hauteur d'au moins 16 m ?

19 Vrai ou faux ? (variations et extremums) ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie, avec un contre-exemple quand elle est fausse.

- Si $f(-1) < f(2)$, alors f est croissante sur $[-1 ; 2]$.
- Si f est croissante sur $[0 ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; 7]$, alors le maximum de f sur $[0 ; 7]$ est $f(3)$.
- Un minimum est toujours atteint à une borne de l'intervalle.
- Toute fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
- Deux fonctions qui ont le même tableau de variations sont égales.

20 Image d'un intervalle ★★★

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[-1 ; 3]$.

- Vérifie que $f(x) = (x - 1)^2 - 1$.
- Dresse le tableau de variations de f sur $[-1 ; 3]$.
- Montre que pour tout $x \in [-1 ; 3]$, $-1 \leq f(x) \leq 3$.
- Résous $f(x) = 0$ sur $[-1 ; 3]$.

21 La fonction $x + 1/x$ ★★★

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- Montre que $f(x) - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$. En déduis que $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$ et que 2 est le minimum de f .
- Soient $0 < a < b$. Montre que $f(a) - f(b) = \frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$.
- Montre que f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- Dresse le tableau de variations sur $]0 ; +\infty[$. Compare $f(2)$ et $f(\frac{1}{2})$.

22 Déterminer une fonction affine ★★★

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine telle que $f(2) = 7$ et $f(5) = -2$.

- Détermine a et b .
- Donne le sens de variation de f .
- Résous $f(x) \geq 0$.

23 Ranger sans calculatrice ★★★

Range dans l'ordre croissant, en justifiant à l'aide des variations : $A = (-2,3)^2$; $B = 1,5^2$; $C = (-1,2)^2$; $D = (-0,3)^2$.