

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Vrai ou faux (justifier) / 3 pts

Durée : 55 minutes. Calculatrice non nécessaire.

- Faux** (1 pt). Contre-exemple : dans un cube ABCDEFGH, les droites (AB) et (CG) n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles ; elles sont non coplanaires.
- Vrai** (1 pt). Avec un point A et B, C, D tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{w}$, on a $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$: D appartient au plan (ABC) (ou à tout plan contenant A, B, C si ces points sont alignés), donc les vecteurs sont coplanaires.
- Vrai** (1 pt). $O\vec{A}(1 ; 2 ; 3)$ et $O\vec{B}(-2 ; -4 ; -6) = -2O\vec{A}$: les vecteurs sont colinéaires, donc O, A, B sont alignés.

2 Décomposition dans un tétraèdre / 4 pts

- $\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{CN} = \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{CD} = \vec{AC} + \frac{2}{3}(\vec{AD} - \vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$. (1 pt)
- $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, donc $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$. (1 pt)
- $\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = -\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{AD}$. (1 pt)
- $3\vec{MN} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{AD} = \vec{MP}$. Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$ sont colinéaires : **M, N et P sont alignés**. (1 pt)

3 Coordonnées dans l'espace / 4 pts

- $\vec{AB}(2 ; -1 ; 2)$ et $\vec{AC}(3 ; 1 ; 5)$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles ($2 \div 3 \neq -1 \div 1$) : **non colinéaires**. (1 pt)
- ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$. Avec $D(x ; y ; z)$: $5 - x = 2$, $2 - y = -1$, $4 - z = 2$, donc **D(3 ; 3 ; 2)**. (1 pt)
- Milieu de [AC] : **(7/2 ; 3/2 ; 3/2)**. Milieu de [BD] : $((4 + 3) \div 2 ; (0 + 3) \div 2 ; (1 + 2) \div 2) = (7/2 ; 3/2 ; 3/2)$. Ils sont **égaux** : le centre du parallélogramme est **(7/2 ; 3/2 ; 3/2)**. (1 pt)
- $\vec{AE}(1 ; -3 ; -1)$. On teste $\vec{AE} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$: $2\alpha + 3\beta = 1$; $-\alpha + \beta = -3$; $2\alpha + 5\beta = -1$. Avec $\alpha = 2$ et $\beta = -1$: $4 - 3 = 1 \checkmark$, $-2 - 1 = -3 \checkmark$, $4 - 5 = -1 \checkmark$. Donc $\vec{AE} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$: **E appartient au plan (ABC)**. (1 pt)

4 Droites et représentations paramétriques / 4 pts

- a. $\overrightarrow{AB}(2 ; -4 ; 1)$. Une représentation de (AB) est $\mathbf{x} = 1 + 2\mathbf{t} ; \mathbf{y} = 2 - 4\mathbf{t} ; \mathbf{z} = -1 + \mathbf{t}$ ($\mathbf{t} \in \mathbb{R}$). (1 pt)
- b. Pour C : $x = -3$ donne $t = -2$; alors $y = 2 + 8 = 10$ et $z = -1 - 2 = -3$: **C $\in$ (AB)**. Pour D : $x = 5$ donne $t = 2$; alors $y = 2 - 8 = -6$ mais $z = -1 + 2 = 1 \neq 2$: **D $\notin$ (AB)**. (1 pt)
- c. Les vecteurs directeurs $(2 ; -4 ; 1)$ et $(1 ; 1 ; 1)$ ne sont pas colinéaires (0,5 pt). On résout $1 + 2t = 4 + s$; $2 - 4t = -7 + s$; $-1 + t = s$. La troisième équation donne $s = t - 1$; la première devient $1 + 2t = 3 + t$, donc $t = 2$ et $s = 1$; la deuxième est vérifiée : $2 - 8 = -6 = -7 + 1$ ✓ (1 pt). Les droites sont **sécantes** au point de coordonnées **(5 ; -6 ; 1)** (0,5 pt).

5 Positions relatives dans un cube / 3 pts

- a. BDHF est un rectangle, donc $(BD) \parallel (FH)$. Or (FH) est incluse dans le plan (EFG) (c'est une diagonale de la face EFGH) : (BD) est parallèle à (EFG) . Comme B n'est pas dans ce plan, la droite est **strictement parallèle** au plan. (1 pt)
- b. ACEG est un rectangle : $(AC) \parallel (EG)$. ABGH est un rectangle : $(AH) \parallel (BG)$. Les droites sécantes (AC) et (AH) de (ACH) sont parallèles aux droites sécantes (EG) et (BG) de (BEG) : **les plans sont parallèles**. (1 pt)
- c. Les deux plans contiennent O (milieu de $[AC]$ et de $[BD]$) et O' (milieu de $[EG]$ et de $[FH]$). Ils sont distincts (B n'est pas dans (ACG)), donc leur intersection est **la droite (OO')**. (1 pt)

6 Base de l'espace / 2 pts

- a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Si $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, alors $\alpha + 2\beta = 1$, $\beta = 2$ et $\alpha = -1$. Les deux premières équations donnent $\alpha = -3$, ce qui contredit $\alpha = -1$: aucun couple ne convient. Les vecteurs sont **non coplanaires** : c'est une base. (1 pt)
- b. On cherche a, b, c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$: $a + 2b + c = 3$, $b + 2c = 3$, $a - c = -1$. Alors $a = c - 1$, puis $2b + 2c = 4$ donc $b = 2 - c$; la deuxième équation donne $2 - c + 2c = 3$, soit $c = 1$, $b = 1$, $a = 0$. Donc **$\vec{t} = \vec{v} + \vec{w}$** , de coordonnées **(0 ; 1 ; 1)**. Vérification : $(2 + 1 ; 1 + 2 ; 0 - 1) = (3 ; 3 ; -1)$ ✓. (1 pt)