

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Vecteurs égaux dans un cube ★★★

- Faux.** EFGH est un carré, donc $\vec{EF} = \vec{HG}$; or $\vec{GH}$ est l'opposé de $\vec{HG}$, donc $\vec{GH} = -\vec{HG}$. Les deux vecteurs ont même direction mais des sens contraires.
- Vrai.** ACEG est un rectangle (AE et CG sont parallèles et de même longueur), donc $\vec{AC} = \vec{EG}$.
- Faux.** BDHF est un rectangle, donc $\vec{BD} = \vec{FH}$. Comme $\vec{HF} = -\vec{FH}$, on obtient $\vec{HF} = -\vec{BD}$: les vecteurs sont opposés.
- Vrai.** AFGD est un rectangle (AD et FG sont parallèles et de même longueur), donc $\vec{AF} = \vec{DG}$.
- Faux.** (AG) et (CE) sont deux diagonales différentes du cube : elles se coupent au centre du cube et n'ont pas la même direction, donc $\vec{AG} \neq \vec{CE}$.

2 Simplifier des sommes de vecteurs ★★★

- Par la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AG}$.
- Comme EFGH est un carré et ABCD aussi, $\vec{HG} = \vec{DC}$. Donc $\vec{AD} + \vec{HG} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$.
- $\vec{AG} - \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AG} = \vec{CG}$.
- $\vec{EF} + \vec{FG} = \vec{EG}$, puis $\vec{EG} + \vec{GC} = \vec{EC}$.

3 Coordonnées dans le repère du cube ★★★

- Les coordonnées se lisent avec $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, etc. : **C(1 ; 1 ; 0)**, **F(1 ; 0 ; 1)**, **G(1 ; 1 ; 1)** et **H(0 ; 1 ; 1)**.
- Un milieu a pour coordonnées les moyennes de celles des extrémités.
O milieu de [AC] avec A(0 ; 0 ; 0) et C(1 ; 1 ; 0) : **O(1/2 ; 1/2 ; 0)**.
I milieu de [EG] avec E(0 ; 0 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1) : **I(1/2 ; 1/2 ; 1)**.
J milieu de [BF] avec B(1 ; 0 ; 0) et F(1 ; 0 ; 1) : **J(1 ; 0 ; 1/2)**.
Ω milieu de [AG] : **Ω(1/2 ; 1/2 ; 1/2)**.
- I) a pour coordonnées $(1 - 1/2 ; 0 - 1/2 ; 1/2 - 1)$, soit **(1/2 ; -1/2 ; -1/2)**.

4 Coordonnées de vecteurs et de points ★★★

- a. $\vec{AB}(3 - 1 ; -1 - 2 ; 0 - (-1)) = (2 ; -3 ; 1) ; \vec{AC}(-2 - 1 ; 4 - 2 ; 5 - (-1)) = (-3 ; 2 ; 6) ; \vec{BC}(-2 - 3 ; 4 - (-1) ; 5 - 0) = (-5 ; 5 ; 5).$
- b. $2\vec{AB} - \vec{AC} = (4 - (-3) ; -6 - 2 ; 2 - 6) = (7 ; -8 ; -4).$
- c. M a pour coordonnées : on calcule $(3 + (-2)) \div 2 = 1/2$, $(-1 + 4) \div 2 = 3/2$ et $(0 + 5) \div 2 = 5/2$. Donc **M(1/2 ; 3/2 ; 5/2).**
- d. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$. Avec $D(x ; y ; z)$, $\vec{DC}(-2 - x ; 4 - y ; 5 - z) = (2 ; -3 ; 1)$. On en tire $x = -4$, $y = 7$, $z = 4$: **D(-4 ; 7 ; 4).**

5 Colinéarité et alignement ★★★

- a. On cherche si les coordonnées sont proportionnelles. $\vec{v} = -1/2\vec{u}$ car $(-1/2 \times 2 ; -1/2 \times (-4) ; -1/2 \times 6) = (-1 ; 2 ; -3) : \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**. De même $\vec{t} = 1/2\vec{u}$, donc $\vec{t}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. En revanche $\vec{w}$ n'est colinéaire à aucun autre : $3 \div 2 = 3/2$ mais $1 \div (-4) = -1/4$, les rapports sont différents.
- b. $\vec{AB}(2 ; 1 ; -1)$ et $\vec{AC}(6 ; 3 ; -3) = 3\vec{AB}$: les vecteurs sont colinéaires donc **A, B, C sont alignés**. Pour D : $\vec{AD}(4 ; 2 ; 1)$. Les rapports $4 \div 2 = 2$ et $2 \div 1 = 2$ sont égaux, mais $1 \div (-1) = -1$: $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas colinéaires, donc **A, B, D ne sont pas alignés**.

6 Représentations paramétriques ★★★

- a. $\vec{AB}(3 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de (AB). Avec le point A : **$x = 2 + 3t ; y = -1 + 2t ; z = 3 - 3t$ ($t \in \mathbb{R}$).**
- b. **$x = t ; y = 4 - 3t ; z = -2 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$).**
- c. Pour P et (AB) : $x = -1$ donne $2 + 3t = -1$, donc $t = -1$; alors $y = -1 - 2 = -3$ et $z = 3 + 3 = 6$: **P ∈ (AB).**
Pour M et d : $x = 3$ donne $t = 3$; alors $y = 4 - 9 = -5$ mais $z = -2 + 6 = 4 \neq 2$: **M ∉ d.**
Pour N : $x = -2$ donne $t = -2$; alors $y = 4 + 6 = 10$ et $z = -2 - 4 = -6$: **N ∈ d.**

7 Positions relatives dans un cube ★★★

- a. ABGH est un rectangle : (AB) et (GH) sont dans le plan (ABG) et parallèles. Elles sont **strictement parallèles**.
- b. $AD \parallel BC \parallel FG$ et les droites sont distinctes : **strictement parallèles**.
- c. (AB) est horizontale, (CG) est verticale et elles ne se coupent pas. Il n'existe aucun plan contenant les deux (les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{CG}$ ne sont pas coplanaires) : elles sont **non coplanaires**.
- d. (AC) et (BD) sont les diagonales du carré ABCD : elles sont **sécantes** au centre du carré.
- e. (AB) est parallèle à (EF), qui est incluse dans le plan (EFG), et A n'est pas dans ce plan : la droite est **strictement parallèle** au plan.

- f. (EC) coupe le plan (ABC) en C et n'est pas incluse dans ce plan (E n'y est pas) : elles sont **sécantes en C**.
- g. Les faces opposées ABFE et DCGH sont dans deux plans **strictement parallèles**.
- h. Les deux plans contiennent le milieu O de [AC] et [BD], et ne sont pas confondus (B n'est pas dans (ACG)) : ils sont **sécants** selon la droite (OO') où O' est le centre de la face EFGH.

8 Décomposer dans la base du cube ★★★

- $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AH} = -\vec{AB} + (\vec{AD} + \vec{DH}) = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ car $\vec{DH} = \vec{AE}$.
- $\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.
- $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AF} = -\vec{AD} + (\vec{AB} + \vec{BF}) = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ car $\vec{BF} = \vec{AE}$.
- K est le milieu de [EG] et L celui de [BG], donc $\vec{KL} = \vec{KG} + \vec{GL} = \frac{1}{2}\vec{EG} + \frac{1}{2}\vec{GB}$. Or $\vec{EG} = \vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{GB} = \vec{GC} + \vec{CB} = -\vec{w} - \vec{v}$. Donc $\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}(-\vec{v} - \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$.

Vérification avec les coordonnées dans le repère (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) : K($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1) et L($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0) donnent $\vec{KL}(\frac{1}{2}$; 0 ; $-\frac{1}{2}$), ce qui concorde.

9 Milieux et centre d'un tétraèdre ★★★

- a. I est le milieu de [AB] : $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. J est le milieu de [CD] : $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$, c'est-à-dire $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.
- b. K est le milieu de [IJ] donc $\vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{AI} + \vec{AJ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.
- c. $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ et $\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$. Soit T le milieu de [MN] : $\vec{AT} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{AN}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) = \vec{AK}$. Les points T et K ont donc le même vecteur position depuis A : $\vec{T} = \vec{K}$. Les segments [IJ] et [MN] ont le même milieu K.

Remarque : K est le centre de gravité du tétraèdre ; les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées s'y croisent.

10 Quatre points sont-ils coplanaires ? ★★★

- a. $\vec{AB}(1 ; 1 ; -2)$ et $\vec{AC}(-1 ; 3 ; -1)$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles ($1 \div (-1) = -1$ mais $1 \div 3 = \frac{1}{3}$) : **A, B, C ne sont pas alignés** et définissent un plan.
- b. $\vec{AD}(3 ; -1 ; -3)$. On cherche α et β tels que $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$: $\alpha - \beta = 3$, $\alpha + 3\beta = -1$, $-2\alpha - \beta = -3$. En soustrayant les deux premières équations : $4\beta = -4$, donc $\beta = -1$ et $\alpha = 2$. Vérification avec la troisième : $-2 \times 2 - (-1) = -3$ ✓. Donc $\vec{AD} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$: **A, B, C, D sont coplanaires**.
- c. $\vec{AE}(-1 ; 0 ; -2)$. Le système $\alpha - \beta = -1$, $\alpha + 3\beta = 0$, $-2\alpha - \beta = -2$ donne avec les

deux premières $\beta = 1/4$ et $\alpha = -3/4$. La troisième équation devient $-2 \times (-3/4) - 1/4 = 5/4 \neq -2$. Le système n'a pas de solution : **A, B, C, E ne sont pas coplanaires.**

11 Droites parallèles ou confondues ? ★★★

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1 ; -2 ; 1)$.

d et d₁. $\vec{u}_1(-2 ; 4 ; -2) = -2\vec{u}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles. Le point $(5 ; -5 ; 2)$ de d_1 ($s = 0$) est-il sur d ? $x = 5$ donne $t = 3$, puis $y = 1 - 6 = -5$ et $z = -1 + 3 = 2$: oui. Les droites ont un point commun et sont parallèles : **elles sont confondues.**

d et d₂. $\vec{u}_2(2 ; -4 ; 2) = 2\vec{u}$: droites parallèles. Le point $O(0 ; 0 ; 0)$ de d_2 est-il sur d ? $x = 0$ donne $2 + t = 0$, donc $t = -2$; alors $y = 1 + 4 = 5 \neq 0$. Donc $O \notin d$: **les droites sont strictement parallèles.**

12 Droites sécantes : point d'intersection ★★★

Les vecteurs directeurs $\vec{u}_1(1 ; -1 ; 2)$ et $\vec{u}_2(2 ; -2 ; 2)$ ne sont pas colinéaires ($1 \div 2 = 1/2$ mais $2 \div 2 = 1$), donc les droites ne sont pas parallèles.

On cherche t et s tels que $1 + t = 1 + 2s$; $2 - t = 2 - 2s$; $3 + 2t = 5 + 2s$.

La première équation donne $t = 2s$ (la deuxième aussi). La troisième devient $3 + 4s = 5 + 2s$, donc $s = 1$ puis $t = 2$. Le système a une solution unique : **les droites sont sécantes.**

Pour $t = 2$, on obtient $(1 + 2 ; 2 - 2 ; 3 + 4) = (3 ; 0 ; 7)$. Avec $s = 1$: $(1 + 2 ; 2 - 2 ; 5 + 2) = (3 ; 0 ; 7) \checkmark$. Le point d'intersection est **(3 ; 0 ; 7)**.

13 Deux plans parallèles dans un cube ★★★

Le plan (AFH) est dirigé par $\vec{AF}$ et $\vec{AH}$, le plan (BDG) par $\vec{BG}$ et $\vec{DG}$.

ABGH est un rectangle, donc $\vec{AH} = \vec{BG}$: $(AH) \parallel (BG)$. De même AFGD est un rectangle, donc $\vec{AF} = \vec{DG}$: $(AF) \parallel (DG)$.

Les droites (AF) et (AH) sont sécantes en A et ne sont pas confondues ; elles sont parallèles respectivement à (DG) et (BG), qui sont sécantes en G. Deux droites sécantes de (AFH) sont parallèles à deux droites sécantes de (BDG) : **les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.** Ils sont de plus distincts, car A n'appartient pas à (BDG).

14 Théorème du toit dans une pyramide ★★★

- Les plans (SAB) et (SCD) ont en commun le point S. Ils ne sont pas confondus : le point C n'appartient pas au plan (SAB), sinon la pyramide serait aplatie. Ils sont donc **sécants** selon une droite Δ passant par S.
- La droite (AB) est incluse dans (SAB) et (CD) dans (SCD). Comme ABCD est un parallélogramme, $(AB) \parallel (CD)$. Par le **théorème du toit**, la droite Δ est parallèle à (AB) et à (CD). C'est **la parallèle à (AB) passant par S**.
- De même, $(AD) \subset (SAD)$, $(BC) \subset (SBC)$ et $(AD) \parallel (BC)$: l'intersection de (SAD) et (SBC) est **la parallèle à (AD) passant par S**.

15 Un parallélogramme caché dans un tétraèdre ★★★

- $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BA}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$ (car $\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$).
- $\vec{KL} = \vec{KD} + \vec{DL} = \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$.
- Comme $\vec{IJ} = \vec{KL}$, **IJKL est un parallélogramme** (éventuellement aplati, mais ici les points ne sont pas alignés). En particulier I, J, K, L sont coplanaires.
- $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ donc (IJ) est parallèle à (BC), qui est incluse dans le plan (BCD). La droite (IJ) n'est pas incluse dans (BCD) car I n'y appartient pas : elle est **strictement parallèle au plan (BCD)**.

16 Une relation dans la pyramide ★★★

- On écrit $\vec{SA} + \vec{SC} - \vec{SB} - \vec{SD} = (\vec{SA} - \vec{SB}) + (\vec{SC} - \vec{SD}) = \vec{BA} + \vec{DC}$. Or ABCD est un parallélogramme : $\vec{AB} = \vec{DC}$, donc $\vec{BA} = -\vec{DC}$. La somme vaut $\vec{0}$: **$\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$** .
- O est le milieu de la diagonale [AC] : $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$ (relation du milieu, valable pour tout point S). Donc **$\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$** , et par la question précédente, $\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$ aussi, ce qui confirme que O est le milieu de [BD].

17 Intersection avec les plans de coordonnées ★★★

$A(2 ; 2 ; -4)$ donc (AB) : $x = 2 + 2t ; y = -1 + 2t ; z = 1 - 4t$ ($t \in \mathbb{R}$).

- Plan (xOy) : $z = 0$, donc $1 - 4t = 0$ et $t = \frac{1}{4}$. Alors $x = \frac{5}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$: le point est **$(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2} ; 0)$** .
- Plan (yOz) : $x = 0$, donc $2 + 2t = 0$ et $t = -1$. Alors $y = -3$ et $z = 5$: le point est **$(0 ; -3 ; 5)$** .
- Plan (xOz) : $y = 0$, donc $-1 + 2t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$. Alors $x = 3$ et $z = -1$: le point est **$(3 ; 0 ; -1)$** .

18 Deux droites non coplanaires ★★★

Les vecteurs directeurs $\vec{u}(1 ; 1 ; -1)$ et $\vec{u}'(1 ; 2 ; 1)$ ne sont pas colinéaires ($1 \div 1 = 1$ mais $1 \div 2 = \mathbf{1/2}$) : les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

Cherchons un éventuel point commun : $t = 1 + s ; 1 + t = 2s ; 2 - t = 1 + s$. En remplaçant t par $1 + s$ dans la deuxième équation : $2 + s = 2s$, donc $s = 2$ et $t = 3$. La troisième équation donne alors $2 - 3 = -1$ au premier membre et $1 + 2 = 3$ au second : $-1 \neq 3$. **Le système n'a pas de solution** : d et d' n'ont aucun point commun.

Deux droites sans point commun et non parallèles ne sont pas coplanaires (deux droites coplanaires seraient sécantes, parallèles ou confondues) : **d et d' sont non coplanaires.**

19 Droite et plan : intersection ★★★

- Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles (la première coordonnée de $\vec{v}$ est nulle alors que celle de $\vec{u}$ ne l'est pas) : ils ne sont pas colinéaires. $M \in \square \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Leftrightarrow \mathbf{x - 1 = \alpha ; y = \alpha + \beta ; z = \beta}$.
- Pour $M(-1 + 3t ; 5 - 2t ; 2t) \in d : \alpha = 3t - 2, \beta = 2t$ et $\alpha + \beta = 5 - 2t$. La troisième relation donne $3t - 2 + 2t = 5 - 2t$, soit $7t = 7$ et $t = 1$. Alors $\alpha = 1$ et $\beta = 2$: le système a une solution unique, donc **d coupe $\square$ en un seul point**, obtenu pour $t = 1$: **$(2 ; 3 ; 2)$** . Vérification : $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, \beta = 2 \checkmark$.
- Le vecteur directeur de d' est $\vec{u}'(1 ; 2 ; 1) = \vec{u} + \vec{v}$: il est combinaison linéaire des vecteurs directeurs de $\square$, donc d' est parallèle à $\square$. Il reste à voir si d' est incluse : le point $(0 ; 0 ; 2)$ de d' ($t = 0$) est dans $\square$ si $\alpha = -1, \beta = 2$ et $\alpha + \beta = 0$. Or $\alpha + \beta = 1 \neq 0$. Ce point n'est pas dans $\square$: **d' est strictement parallèle à $\square$.**

20 Quatre milieux sont-ils coplanaires ? ★★★

- $I(1 ; 1/2 ; 0), J(1 ; 0 ; 1/2), K(1/2 ; 0 ; 1), L(0 ; 1/2 ; 1)$.
- $\vec{IJ}(0 ; -1/2 ; 1/2), \vec{IK}(-1/2 ; -1/2 ; 1)$ et $\vec{IL}(-1 ; 0 ; 1)$. Alors $2\vec{IK} - 2\vec{IJ} = (-1 - 0 ; -1 + 1 ; 2 - 1) = (-1 ; 0 ; 1) = \vec{IL} \checkmark$.
- $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\vec{IJ}$ est nulle alors que celle de $\vec{IK}$ ne l'est pas, et $\vec{IJ}$ n'est pas le vecteur nul), donc I, J, K définissent un plan, et $\vec{IL} = 2\vec{IK} - 2\vec{IJ}$ est combinaison linéaire de $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$: **L appartient à (IJK)** , donc I, J, K, L sont coplanaires.
- $\vec{ID}(-1 ; 1/2 ; 0)$. On cherche α et β avec $\vec{ID} = \alpha \vec{IK} + \beta \vec{IJ}$: $-1/2\alpha = -1$ donne $\alpha = 2$; $-1/2\alpha - 1/2\beta = 1/2$ donne $-1 - 1/2\beta = 1/2$, donc $\beta = -3$; troisième équation : $\alpha + 1/2\beta = 2 - 3/2 = 1/2 \neq 0$. **Pas de solution : D n'appartient pas au plan (IJK) .**

21 Le centre de gravité d'un tétraèdre ★★★

- a. Par Chasles, $\vec{A'B} = \vec{A'A} + \vec{AB}$, $\vec{A'C} = \vec{A'A} + \vec{AC}$ et $\vec{A'D} = \vec{A'A} + \vec{AD}$. En additionnant : $\vec{0} = 3\vec{A'A} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$, donc $3\vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$, soit **$\vec{AA'} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$** .
- b. On a $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AA'}$, donc $\vec{AG} = \frac{1}{4} \times 3\vec{AA'} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$. Les vecteurs sont colinéaires avec un coefficient compris entre 0 et 1 : G est sur le segment $[AA']$ et $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$.
- c. De la même manière, $\vec{BB'} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD})$. Or $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ et $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD}$, donc $\vec{BB'} = \frac{1}{3}(3\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{AD})$. D'autre part $\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{AG} = \vec{BA} + \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) = \vec{BA} - \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD} = \frac{1}{4}(3\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{AD})$. Ainsi $\vec{BG} = \frac{3}{4}\vec{BB'}$: **G est sur $[BB']$** . Par symétrie, G est aussi sur $[CC']$ et $[DD']$. **Les quatre médianes du tétraèdre sont concourantes en G**, situé aux $\frac{3}{4}$ de chacune depuis le sommet.

22 Base de l'espace et coordonnées ★★★

- a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Supposons $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$: on obtient $1 = \alpha$, $0 = 2\alpha + \beta$ et $2 = \beta$. La première équation donne $\alpha = 1$, la deuxième $\beta = -2$, ce qui contredit la troisième ($\beta = 2$). Le système n'a pas de solution : $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : **$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base**.
- b. On cherche a, b, c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$: $a + c = 3$, $2a + b = 3$, $b + 2c = 5$. De la première, $a = 3 - c$. La deuxième devient $6 - 2c + b = 3$, soit $b = 2c - 3$. La troisième : $2c - 3 + 2c = 5$, donc $c = 2$, puis $b = 1$ et $a = 1$. Vérification : $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = (1 + 0 + 2 ; 2 + 1 + 0 ; 0 + 1 + 4) = (3 ; 3 ; 5) \checkmark$. Donc **$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$** , de coordonnées **$(1 ; 1 ; 2)$** dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

23 Les diagonales d'un parallélépipède ★★★

- a. $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
 $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (car $\vec{DH} = \vec{AE}$).
 $\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE} = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ (car $\vec{CA} = -\vec{AC} = -\vec{AB} - \vec{AD}$).
 $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.
- b. M milieu de $[AG]$: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.
Milieu N de $[BH]$: $\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BH} = \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{AM}$.
Milieu P de $[CE]$: $\vec{AP} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CE} = \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}(-\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{AM}$.
Milieu Q de $[DF]$: $\vec{AQ} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DF} = \vec{v} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{AM}$.
Les quatre milieux ont le même vecteur position depuis A : **les quatre diagonales du parallélépipède se coupent en leur milieu commun M**, le centre du solide.

24 Section d'un cube par un plan ★★★

- a. $I(\frac{1}{2} ; 0 ; 1)$, $J(1 ; \frac{1}{2} ; 1)$, $K(1 ; 1 ; \frac{1}{2})$. $IJ(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0)$ et $IK(\frac{1}{2} ; 1 ; -\frac{1}{2})$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles (la troisième de IJ est nulle, pas celle de IK) : **I, J, K ne sont pas alignés**, ils définissent bien un plan.

- b. On a $L(\frac{1}{2} ; 1 ; 0)$, $M(0 ; \frac{1}{2} ; 0)$, $N(0 ; 0 ; \frac{1}{2})$.

$IL(0 ; 1 ; -1)$: on cherche $IL = \alpha IJ + \beta IK$. La troisième coordonnée donne $-\frac{1}{2}\beta = -1$, donc $\beta = 2$; la première donne $\frac{1}{2}\alpha + 1 = 0$, donc $\alpha = -2$; la deuxième : on vérifie : $-2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = 1 \checkmark$. Donc $IL = -2IJ + 2IK$.

$IM(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; -1)$: $\beta = 2$, puis $\frac{1}{2}\alpha + 1 = -\frac{1}{2}$ donne $\alpha = -3$; deuxième coordonnée : $-3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = \frac{1}{2} \checkmark$. Donc $IM = -3IJ + 2IK$.

$IN(-\frac{1}{2} ; 0 ; -\frac{1}{2})$: $\beta = 1$, puis $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donne $\alpha = -2$; deuxième coordonnée : $-2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0 \checkmark$. Donc $IN = -2IJ + IK$.

Dans chaque cas, le vecteur est combinaison linéaire de IJ et IK : **L, M, N appartiennent à (IJK)**.

- c. Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux de six arêtes du cube. Deux d'entre eux sur une même face se joignent par un segment : I et J (face EFGH), J et K (face BCGF), K et L (face CDHG), L et M (face ABCD), M et N (face ADHE), N et I (face ABFE). La section est l'**hexagone IJKLMN**.

