

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Cours de maths - Terminale

Dans l'**espace**, tout se passe comme dans le plan... avec une dimension de plus ! Les vecteurs s'additionnent et se multiplient par un réel de la même façon, mais une troisième direction apparaît : il faut apprendre à reconnaître quand des points sont **alignés**, quand ils sont **coplanaires**, et comment **repérer** un point avec trois coordonnées. Dans ce chapitre, tu vas manipuler des vecteurs de l'espace, décrire des droites et des plans, étudier leurs positions relatives et écrire des **représentations paramétriques** de droites. C'est la base de toute la géométrie dans l'espace de Terminale.

1. Les vecteurs de l'espace

Un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur** (la norme). Deux représentants (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur lorsque le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Égalité de deux vecteurs

Pour quatre points A, B, C, D de l'espace : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati), c'est-à-dire si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Toutes les règles de calcul vues dans le plan restent vraies dans l'espace.

Règles de calcul

- **Relation de Chasles** : pour tous points A, B, C, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$; le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$.
- Pour un réel k, $k\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$; on a $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ et $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- Un point I est le **milieu** de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, ou encore $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

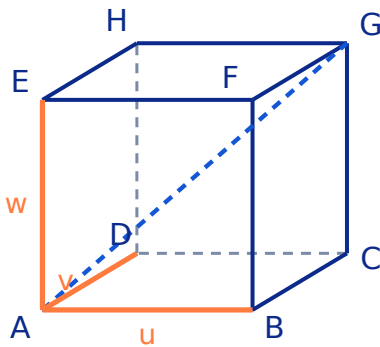
Pour tout point M, si I est le milieu de [AB], on a aussi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$: c'est une relation très pratique.

Combinaison linéaire

Un vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. On définit de même une combinaison linéaire de trois vecteurs : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{t}$.

Exemple dans un cube

Dans le cube ABCDEFGH, on pose $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{w} = \vec{AE}$. Exprimons la diagonale $\vec{AG}$. Comme ABCD est un carré, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Comme ACGE est un rectangle, $\vec{CG} = \vec{AE}$. Par Chasles, **$\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$** .



Astuce

Pour exprimer un vecteur à l'aide d'autres vecteurs, **passe toujours par un même point de départ** (souvent l'origine de la base) et applique Chasles pas à pas. Évite de deviner : chaque égalité doit être justifiée par un parallélogramme ou une définition.

2. Colinéarité et droites de l'espace

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsque l'un est un multiple de l'autre : il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (si $\vec{v}$ est non nul). Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Alignement et droites

- Trois points A, B, C avec $A \neq B$ sont **alignés** si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Une **droite** d de l'espace est déterminée par un point A et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ non nul : $M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = k\vec{u}$ pour un réel k .
- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont

colinéaires.

Méthode : démontrer que trois points sont alignés

1. Choisis un des points comme origine (par exemple A).
2. Exprime $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ avec les mêmes vecteurs de départ.
3. Montre que l'un est un multiple de l'autre : $\vec{AC} = k\vec{AB}$.
4. Conclut : « $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc A, B et C sont alignés ».

Exemple. Dans un tétraèdre ABCD, les points P et Q vérifient $\vec{AP} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ et $\vec{AQ} = 3\vec{AB} + 6\vec{AC}$. Alors $\vec{AQ} = 3\vec{AP}$, donc $\vec{AP}$ et $\vec{AQ}$ sont colinéaires et **A, P, Q sont alignés**.

Piège

Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être « **non coplanaires** ». Colinéarité de vecteurs directeurs et absence de point commun ne suffisent pas à conclure : vérifie toujours les deux !

3. Plans de l'espace et coplanarité

Un plan, c'est une « feuille plate infinie ». On peut le définir de deux manières équivalentes.

Plan de l'espace

Un plan est déterminé :

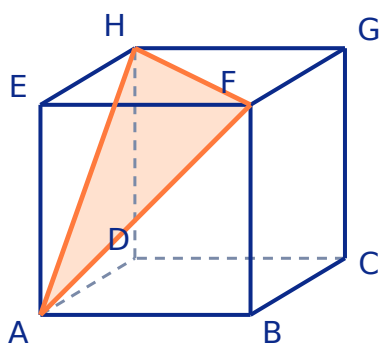
- soit par **trois points non alignés** A, B, C : on le note (ABC) ;
- soit par **un point A et deux vecteurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ses vecteurs directeurs) : on le note (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Caractérisation d'un plan

Le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ pour deux réels α et β . En particulier, $M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, soit I le milieu de [FH]. Le plan (AFH) est dirigé par $\vec{AF}$ et $\vec{AH}$, non colinéaires. Comme I est le milieu de [FH], $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{AH}$: **I appartient au plan (AFH)**.



Vecteurs coplanaires

Des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, en prenant un point A et les points B, C, D tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{w}$, les points A, B, C, D sont dans un même plan.

Critère de coplanarité

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires **si et seulement si** $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe des réels α , β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Démonstration. Soit A un point, B, C, D tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{w}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan (ABC). Alors $D \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ (caractérisation d'un plan) $\Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Ainsi A, B, C, D sont coplanaires exactement quand $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ■

Conséquence

Quatre points A, B, C, D (avec A, B, C non alignés) sont coplanaires si et seulement si $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ pour des réels α et β .

Piège

Trois vecteurs **non nuls** peuvent très bien être coplanaires sans qu'aucun ne soit colinéaire à un autre ! Par exemple, trois côtés d'un même triangle sont coplanaires. La bonne question est : « l'un d'eux est-il combinaison linéaire des deux autres ? ».

4. Positions relatives, parallélisme et sections

Positions relatives de deux droites

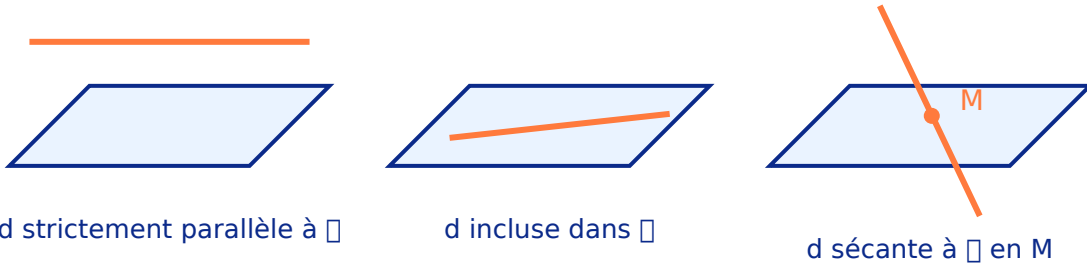
Deux droites d et d' de l'espace sont :

Fiche en ligne : maths-facile.eu/vecteurs-droites-et-plans-de-l-espace-cours-terminale/ · Cours, exercices et contrôles

- **coplanaires** (dans un même plan) : alors elles sont **sécantes** en un point, ou **strictement parallèles**, ou **confondues** ;
- **non coplanaires** : elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite d et un plan π sont : **strictement parallèles** (aucun point commun), ou bien d est **incluse** dans π , ou bien d est **sécante** à π en un unique point.



Positions relatives de deux plans

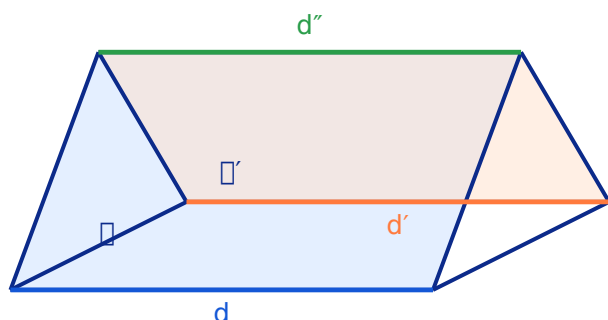
Deux plans π et π' sont : **strictement parallèles**, ou **confondus**, ou **sécants** selon une droite.

Parallélisme

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.
- Une droite d est **parallèle à un plan** π si et seulement si elle est parallèle à une droite de π ; autrement dit si son vecteur directeur est combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de π .
- Deux plans sont **parallèles** si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection sont **parallèles**.

Théorème du toit

Soient π et π' deux plans sécants selon une droite d'' . Si π contient une droite d et π' une droite d' avec $d \parallel d'$, alors **d'' est parallèle à d et à d'** .



Pourquoi ? Imagine le faîtage d'un toit : si les deux bords du bas (les gouttières) sont parallèles, la ligne du haut (le faîtage) leur est aussi parallèle.

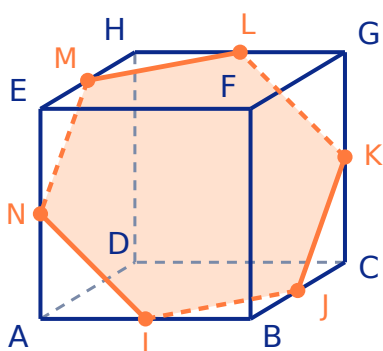
Méthode : construire la section d'un cube par un plan

1. Dès que deux points du plan sont sur une **même face**, trace le segment qui les joint : c'est un côté de la section.
2. Les faces opposées d'un cube sont parallèles : le plan les coupe selon des **segments parallèles**.
3. Si c'est insuffisant, prolonge deux droites coplanaires pour obtenir un nouveau point commun avec le plan, puis recommence.

Exemple : section du cube par le plan (IJK)

Dans le cube ABCDEFGH, I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CG].

1. I et J sont sur la face ABCD, J et K sur la face BCGF : on trace [IJ] et [JK].
2. Dans le plan de la face BCGF, les droites (JK) et (BF) sont sécantes en un point P (en dessous de B). Dans le triangle rectangle PBJ et le triangle rectangle KCJ, on a $BJ = CJ$ et les angles en J sont opposés par le sommet : les triangles sont superposables et $PB = KC$, soit la moitié d'une arête. Le point P est aussi dans le plan de la face ABFE qui contient I : la droite (PI) coupe [AE] en N, et comme $IA = IB$, les triangles rectangles PBI et NAI sont superposables : $AN = PB$, la moitié d'une arête. Le point **N est le milieu de [AE]**.
3. Les faces BCGF et ADHE sont parallèles : le plan (IJK) coupe ADHE selon la parallèle à (JK) passant par N ; elle coupe [EH] en son milieu M.
4. Les faces ABCD et EFGH sont parallèles : la section sur EFGH est la parallèle à (IJ) passant par M ; elle coupe [GH] en son milieu L.
5. Il reste à joindre K et L (même face CDHG), et M et N (même face ADHE). La section est l'**hexagone IJKLMN**.



Astuce

Les parties cachées d'une section se tracent en **pointillés**, comme les arêtes cachées du solide. Une section d'un cube par un plan est un polygone de 3 à 6 côtés : une face du cube contient au plus un côté de la section.

5. Décomposition d'un vecteur et bases de l'espace

Base de l'espace

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ forment une **base** de l'espace s'ils sont **non coplanaires**, c'est-à-dire si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des deux autres.

Décomposition unique

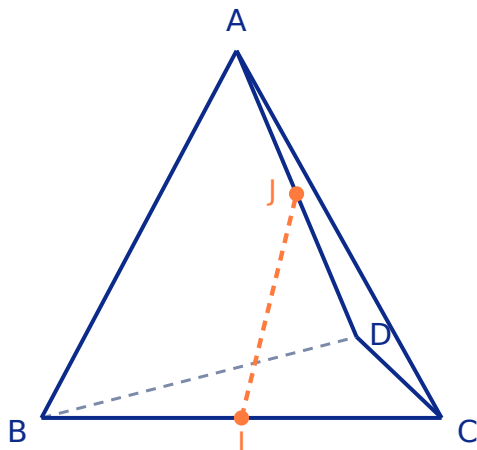
Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace, alors **tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet $(x ; y ; z)$ forme les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans cette base.

Démonstration de l'unicité. Supposons $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Si $x \neq x'$, on peut écrire $\vec{i} = -((y - y') \div (x - x'))\vec{j} - ((z - z') \div (x - x'))\vec{k}$: $\vec{i}$ serait combinaison linéaire de $\vec{j}$ et $\vec{k}$, ce qui contredit le fait que ces trois vecteurs sont non coplanaires. Donc $x = x'$, et de même $y = y'$ et $z = z'$. ■

Exemple : décomposer dans un tétraèdre

Dans le tétraèdre ABCD, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AD]. Exprimons $\vec{IJ}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$. Les vecteurs sont non coplanaires car A, B, C, D ne sont pas dans un même plan.

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$. Or $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ (milieu de [BC]) donc $\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$. De plus $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$. Ainsi $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.



Méthode : décomposer un vecteur

1. Choisis une base ou trois vecteurs « de référence » issus d'un même sommet (par exemple $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$).
2. Écris le vecteur cherché en passant par ce sommet : $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$.
3. Remplace chaque vecteur à l'aide des données (milieu, relation $\vec{AM} = k\vec{AB}$...).
4. Regroupe les termes pour obtenir une écriture du type $x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}$.

6. Repérage dans l'espace et coordonnées

Repère de l'espace

Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point O (l'origine) et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Il est **orthonormé** si les trois vecteurs sont de norme 1 et perpendiculaires deux à deux.

Coordonnées d'un point

Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les réels x, y, z sont l'**abscisse**, l'**ordonnée** et la **cote** de M. On écrit $M(x ; y ; z)$.

Calculs avec les coordonnées

Pour $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $\vec{u}(a ; b ; c)$, $\vec{v}(a' ; b' ; c')$ et un réel k :

- $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$;
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(a + a' ; b + b' ; c + c')$ et $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(ka ; kb ; kc)$;
- le **milieu** de $[AB]$ a pour coordonnées $((x_A + x_B) \div 2 ; (y_A + y_B) \div 2 ; (z_A + z_B) \div 2)$.

Exemple : le cube comme repère

Dans le cube ABCDEFGH, $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est un repère. On lit : $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$. Alors $\vec{BH}$ a pour coordonnées $(0 - 1 ; 1 - 0 ; 1 - 0) = (-1 ; 1 ; 1)$ et le milieu de $[EC]$ est le point de coordonnées $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

Colinéarité en coordonnées

Deux vecteurs $\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(a' ; b' ; c')$, avec $\vec{v}$ non nul, sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $(a ; b ; c) = k(a' ; b' ; c')$, c'est-à-dire si leurs coordonnées sont **proportionnelles**.

Méthode : étudier la coplanarité avec les coordonnées

1. Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Écris l'égalité vectorielle $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$: elle donne un **système de trois équations** à deux inconnues α et β .
3. Résous avec deux équations, puis teste la troisième.
4. S'il y a une solution : les vecteurs sont coplanaires. Sinon : ils ne le sont pas, et forment une base.

Exemple

Dans le repère du cube, le point $G(1 ; 1 ; 1)$ est-il dans le plan (AFH) ? On a $\vec{AF}(1 ; 0 ; 1)$, $\vec{AH}(0 ; 1 ; 1)$ non colinéaires et $\vec{AG}(1 ; 1 ; 1)$. L'égalité $\vec{AG} = \alpha\vec{AF} + \beta\vec{AH}$ donne : $1 = \alpha$, $1 = \beta$ et $1 = \alpha + \beta$. Les deux premières équations donnent $\alpha = \beta = 1$, mais alors $\alpha + \beta = 2 \neq 1$. Le système n'a pas de solution : **G n'appartient pas au plan (AFH)**.

Piège

La formule de distance $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ n'est valable que dans un repère **orthonormé**. Les cubes de ce chapitre sont repérés par $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$: ce repère est orthonormé si l'arête vaut 1.

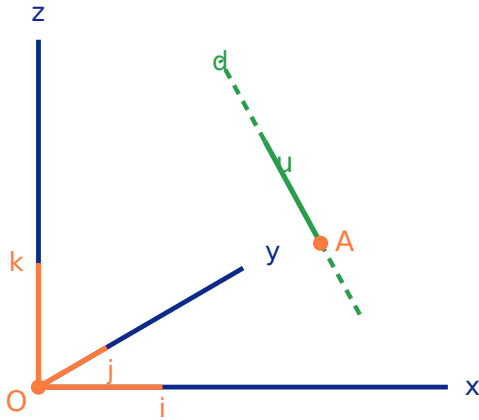
7. Représentations paramétriques d'une droite

Représentation paramétrique

Dans un repère de l'espace, la droite d passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ vérifiant, pour un réel t :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + t\mathbf{a} ; \mathbf{y} = \mathbf{y}_A + t\mathbf{b} ; \mathbf{z} = \mathbf{z}_A + t\mathbf{c} \ (t \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. $M \in d \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$. En traduisant avec les coordonnées de $\vec{AM}$, qui sont $(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$, on obtient $x - x_A = ta$, $y - y_A = tb$ et $z - z_A = tc$. ■



Astuce

Le réel t est un **paramètre** : à chaque valeur de t correspond un point de la droite.
Pour $t = 0$, on trouve A ; pour $t = 1$, on obtient le point $A + \vec{u}$. Si t décrit $[0 ; 1]$ et que $\vec{u} = \vec{AB}$, le point M décrit le **segment $[AB]$** ; pour $t \geq 0$ il décrit la demi-droite $[AB)$.

Astuce

Le réel t est un **paramètre** : à chaque valeur de t correspond un point de la droite.
Pour $t = 0$, on trouve A ; pour $t = 1$, on obtient le point $A + \vec{u}$. Si t décrit $[0 ; 1]$ et que $\vec{u} = \vec{AB}$, le point M décrit le **segment $[AB]$** ; pour $t \geq 0$ il décrit la demi-droite $[AB)$.

Piège

Une droite a une **infinité** de représentations paramétriques : on peut changer le point de départ ou remplacer le vecteur directeur par un vecteur colinéaire. Deux systèmes d'apparence différente peuvent donc décrire la même droite !

Piège

Une droite a une **infinité** de représentations paramétriques : on peut changer le point de départ ou remplacer le vecteur directeur par un vecteur colinéaire. Deux systèmes d'apparence différente peuvent donc décrire la même droite !

Méthode 1 : trouver une représentation paramétrique de (AB)

1. Calcule un vecteur directeur : $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
2. Écris le système avec le point A (ou B) et ce vecteur.

Exemple. A(1 ; 0 ; 2) et B(4 ; -2 ; 3). On a $\vec{AB}(3 ; -2 ; 1)$ donc (AB) : $x = 1 + 3t$, $y = -2t$, $z = 2 + t$.

- ### Méthode 1 : trouver une représentation paramétrique de (AB)
1. Calcule un vecteur directeur : $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
 2. Écris le système avec le point A (ou B) et ce vecteur.
- Exemple.** A(1 ; 0 ; 2) et B(4 ; -2 ; 3). On a $\vec{AB}(3 ; -2 ; 1)$ donc (AB) : $x = 1 + 3t$, $y = -2t$, $z = 2 + t$.

Méthode 1 : trouver une représentation paramétrique de (AB)

1. Calcule un vecteur directeur : $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
2. Écris le système avec le point A (ou B) et ce vecteur.

Exemple. A(1 ; 0 ; 2) et B(4 ; -2 ; 3). On a $\vec{AB}(3 ; -2 ; 1)$ donc (AB) : $x = 1 + 3t$, $y = -2t$, $z = 2 + t$.

Méthode 2 : savoir si un point appartient à une droite

1. Remplace x , y , z par les coordonnées du point dans le système.
2. Résous la première équation pour trouver t .
3. Vérifie les deux autres équations avec cette valeur de t .

- ### Méthode 2 : savoir si un point appartient à une droite
1. Remplace x , y , z par les coordonnées du point dans le système.
 2. Résous la première équation pour trouver t .
 3. Vérifie les deux autres équations avec cette valeur de t .

Exemple. Avec la droite précédente, le point $C(7 ; -4 ; 4) : x = 7$ donne $t = 2$; alors $y = -4$ et $z = 4 : C \in (AB)$. En revanche $D(7 ; -4 ; 5)$ n'y est pas ($z = 4 \neq 5$ pour $t = 2$).

Méthode 3 : positions relatives de deux droites d et d'

1. Compare les vecteurs directeurs. S'ils sont **colinéaires** : prends un point de d et teste s'il est sur d' . Oui : droites **confondues** ; non : **strictement parallèles**.
2. Sinon, écris les deux représentations paramétriques (avec deux paramètres différents t et s) et égalise les trois coordonnées.
3. Si le système a une **solution unique** : les droites sont **sécantes** en ce point. S'il n'a **pas de solution** : elles sont **non coplanaires**.

Exemple complet

$d : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$ et $d' : x = 3 - s, y = s, z = 2 + s$. Les vecteurs directeurs $(2 ; 1 ; -1)$ et $(-1 ; 1 ; 1)$ ne sont pas colinéaires. On résout $1 + 2t = 3 - s$, $-1 + t = s$ et $3 - t = 2 + s$. La deuxième équation donne $s = t - 1$; la première devient $1 + 2t = 4 - t$, donc $t = 1$ et $s = 0$. La troisième : $3 - 1 = 2 = 2 + 0$ est vraie. Les droites sont **sécantes** au point de paramètre $t = 1$, soit **(3 ; 0 ; 2)**.

Avec $d'' : x = 3 - s, y = s, z = 3 + s$ à la place de d' , on trouve $s = -t$ puis $t = 1/2$, et la première équation donne $2 = 7/2$: impossible. Les droites d et d'' sont **non coplanaires**.

8. Démontrer avec des vecteurs : stratégies et exemples

Les vecteurs permettent de démontrer sans se perdre dans la perspective. Voici deux grands types de raisonnements.

Stratégie 1 : montrer un parallélisme ou un parallélogramme

1. Exprime les deux vecteurs concernés avec les mêmes vecteurs de base.
2. Montre qu'ils sont égaux (parallélogramme) ou proportionnels (droites parallèles).
3. Précise que les droites sont distinctes si besoin.

Exemple : le quadrilatère des milieux

Dans un tétraèdre $ABCD$, soient I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Alors $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. De même $\vec{LK} = \vec{LD} + \vec{DK} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. Donc $\vec{IJ} = \vec{LK} : IJKL$ est un **parallélogramme** (en particulier plan), même si $ABCD$ n'est pas plan.

Stratégie 2 : montrer une appartenance à un plan

1. Repère deux vecteurs non colinéaires qui dirigent le plan.
2. Exprime $\vec{AM}$ comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
3. Conclut que M appartient au plan.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH, soit O' le centre de la face EFGH. Le plan (ACE) est dirigé par $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ (non colinéaires). Comme O' est le milieu de [EG], $\vec{AO'} = \vec{AE} + \vec{EO'} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EG} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, puisque $\vec{EG} = \vec{AC}$. Donc **O' appartient au plan (ACE).**

Astuce de Mathbot

Avant de te lancer dans un calcul, fais un petit schéma en perspective et repère les **milieux**, les **parallélogrammes** et les **faces parallèles** : ils t'indiquent presque toujours quelles relations de Chasles utiliser. Un bon croquis, c'est la moitié de la démonstration !

À retenir

- **Chasles** : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$; I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.
- **Colinéarité** : $\vec{u} = k\vec{v}$. Trois points A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
Droite (A ; $\vec{u}$) : $M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = k\vec{u}$.
- **Plan** (A ; $\vec{u}, \vec{v}$) avec $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires : $M \in \text{plan} \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- **Coplanarité** : $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires. Trois vecteurs non coplanaires forment une **base**.
- **Décomposition unique** : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Un point $M(x ; y ; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- **Coordonnées** : $\vec{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$; milieu = moyenne des coordonnées ; vecteurs colinéaires $\Leftrightarrow$ coordonnées proportionnelles.
- **Positions relatives** : deux droites (sécantes, parallèles, confondues, non coplanaires) ; droite/plan (parallèles, incluse, sécante) ; deux plans (parallèles, confondus, sécants selon une droite).
- **Théorème du toit** : $d \subset \Pi, d' \subset \Pi', d // d' \Rightarrow$ la droite $\Pi \cap \Pi'$ est parallèle à d et d'.
- **Représentation paramétrique** de la droite (A ; $\vec{u}(a ; b ; c)$) : $x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc, t \in \mathbb{R}$.
- **Deux droites** données par paramètres : vecteurs directeurs colinéaires ? sinon on résout le système pour trancher entre sécantes et non coplanaires.