

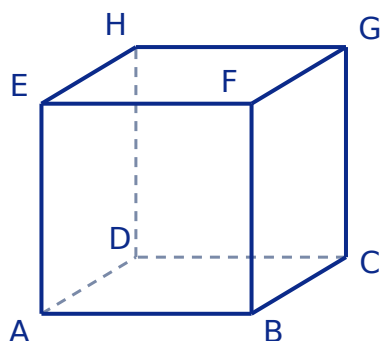
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exercices de maths - Terminale

24 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Vecteurs égaux dans un cube ★★★

ABCDEFGH est un cube. Pour chaque égalité, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.



- a. $\vec{AB} = \vec{GH}$
- b. $\vec{AC} = \vec{EG}$
- c. $\vec{BD} = \vec{HF}$
- d. $\vec{AF} = \vec{DG}$
- e. $\vec{AG} = \vec{CE}$

2 Simplifier des sommes de vecteurs ★★★

ABCDEFGH est un cube. Écris chaque somme à l'aide d'un seul vecteur dont les extrémités sont deux sommets du cube.

- a. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$
- b. $\vec{AD} + \vec{HG}$
- c. $\vec{AG} - \vec{AC}$
- d. $\vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GC}$

3 Coordonnées dans le repère du cube ★★★

ABCDEFGH est un cube. On munit l'espace du repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- Donne les coordonnées des points C, F, G et H.
- Donne les coordonnées du centre O de la face ABCD, du milieu I de [EG], du milieu J de [BF] et du centre Ω du cube (milieu de [AG]).
- Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{IJ}$.

4 Coordonnées de vecteurs et de points ★★★

Dans un repère de l'espace, on donne $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(3 ; -1 ; 0)$ et $C(-2 ; 4 ; 5)$.

- Calcule les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- Calcule les coordonnées de $2\vec{AB} - \vec{AC}$.
- Détermine les coordonnées du milieu M de [BC].
- Détermine les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

5 Colinéarité et alignement ★★★

- Dans un repère, on donne $\vec{u}(2 ; -4 ; 6)$, $\vec{v}(-1 ; 2 ; -3)$, $\vec{w}(3 ; 1 ; -2)$ et $\vec{t}(1 ; -2 ; 3)$. Quels sont les couples de vecteurs colinéaires ?
- Les points $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; 2 ; 0)$, $C(7 ; 4 ; -2)$ sont-ils alignés ? Et les points A, B et $D(5 ; 3 ; 2)$?

6 Représentations paramétriques ★★★

- Donne une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(2 ; -1 ; 3)$ et $B(5 ; 1 ; 0)$.
- Donne une représentation paramétrique de la droite d passant par $C(0 ; 4 ; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -3 ; 2)$.
- Le point $P(-1 ; -3 ; 6)$ appartient-il à (AB) ? Les points $M(3 ; -5 ; 2)$ et $N(-2 ; 10 ; -6)$ appartiennent-ils à d ?

7 Positions relatives dans un cube ★★★

ABCDEFGH est un cube. Précise la position relative des droites et plans suivants (parallèles, sécants, non coplanaires...) et justifie.

- (AB) et (GH)
- (AD) et (FG)
- (AB) et (CG)
- (AC) et (BD)
- (AB) et le plan (EFG)
- (EC) et le plan (ABC)
- les plans (ABF) et (DCG)
- les plans (ACG) et (BDH)

8 Décomposer dans la base du cube ★★★

ABCDEFGH est un cube ; on note $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{w} = \vec{AE}$. K est le centre de la face EFGH et L le centre de la face BCGF.

Exprime chacun des vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{BH}$, $\vec{EC}$, $\vec{DF}$ et $\vec{KL}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

9 Milieux et centre d'un tétraèdre ★★★

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [CD] et K celui de [IJ]. M est le milieu de [AC] et N celui de [BD].

- Exprime $\vec{AI}$ puis $\vec{AJ}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
- En déduire que $\vec{AK} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.
- Exprime de même $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$, puis montre que [IJ] et [MN] ont le même milieu.

10 Quatre points sont-ils coplanaires ? ★★★

Dans un repère de l'espace, on donne $A(1 ; 0 ; 2)$, $B(2 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 3 ; 1)$, $D(4 ; -1 ; -1)$ et $E(0 ; 0 ; 0)$.

- Montre que A, B, C ne sont pas alignés.
- Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?
- Les points A, B, C, E sont-ils coplanaires ?

11 Droites parallèles ou confondues ? ★★★

Dans un repère de l'espace, on considère les droites

$$d : x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = -1 + t ;$$

$$d_1 : x = 5 - 2s, y = -5 + 4s, z = 2 - 2s ;$$

$$d_2 : x = 2s, y = -4s, z = 2s \text{ (} t \text{ et } s \text{ sont des réels).}$$

Étudie la position relative de d et d_1 , puis de d et d_2 .

12 Droites sécantes : point d'intersection ★★★

Dans un repère de l'espace, on considère les droites

$$d_1 : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + 2t ;$$

$$d_2 : x = 1 + 2s, y = 2 - 2s, z = 5 + 2s.$$

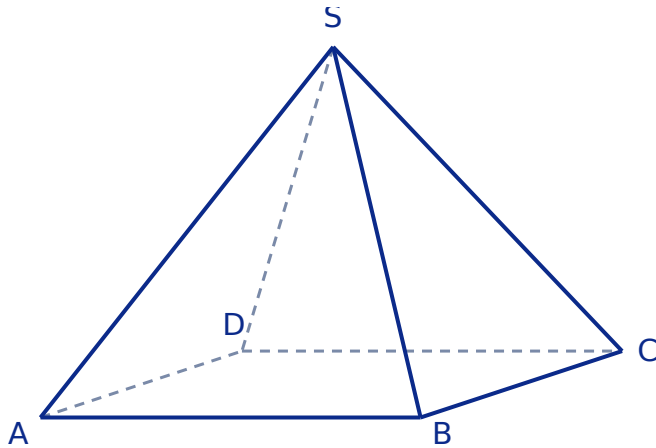
Montre que d_1 et d_2 sont sécantes et donne les coordonnées de leur point d'intersection.

13 Deux plans parallèles dans un cube ★★★

ABCDEFGH est un cube. Démontre que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

14 Théorème du toit dans une pyramide ★★★

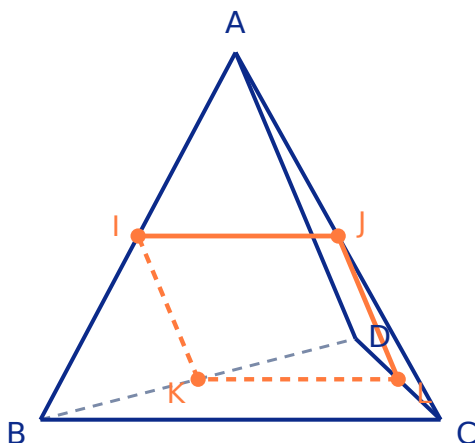
SABCD est une pyramide de base le parallélogramme ABCD.



- Justifie que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants.
- Montre que leur droite d'intersection est parallèle à (AB).
- Que peut-on dire de l'intersection des plans (SAD) et (SBC) ?

15 Un parallélogramme caché dans un tétraèdre ★★★

ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [AC], [BD] et [CD].



- Montre que $IJ = \frac{1}{2}BC$.
- Montre de même que $KL = \frac{1}{2}BC$.
- Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ? Justifie.
- Montre que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

16 Une relation dans la pyramide ★★★

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme de centre O.

- Démontre que $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$.
- En déduire que $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$.

17 Intersection avec les plans de coordonnées ★★★

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(2 ; -1 ; 1)$ et $B(4 ; 1 ; -3)$. Détermine les coordonnées des points où la droite (AB) coupe le plan (xOy), le plan (yOz) et le plan (xOz).

18 Deux droites non coplanaires ★★★

Dans un repère de l'espace, on considère $d : x = t, y = 1 + t, z = 2 - t$ et $d' : x = 1 + s, y = 2s, z = 1 + s$.

Montre que d et d' sont non coplanaires.

19 Droite et plan : intersection ★★★

Dans un repère de l'espace, on considère le plan Π passant par $A(1 ; 0 ; 0)$ et dirigé par $\vec{u}(1 ; 1 ; 0)$ et $\vec{v}(0 ; 1 ; 1)$, ainsi que les droites $d : x = -1 + 3t, y = 5 - 2t, z = 2t$ et $d' : x = t, y = 2t, z = 2 + t$.

- Justifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et traduis $M(x ; y ; z) \in \Pi$ par un système.
- Montre que d coupe Π en un unique point dont tu donneras les coordonnées.
- Montre que d' est strictement parallèle à Π .

20 Quatre milieux sont-ils coplanaires ? ★★★

ABCDEFGH est un cube de repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. I, J, K et L sont les milieux respectifs de [BC], [BF], [EF] et [EH].

- Donne les coordonnées de I, J, K, L.
- Montre que $\vec{IL} = 2\vec{IK} - 2\vec{IJ}$.
- En déduire que I, J, K, L sont coplanaires.
- Le sommet D appartient-il au plan (IJK) ?

21 Le centre de gravité d'un tétraèdre ★★★

ABCD est un tétraèdre. A' est le centre de gravité du triangle BCD, c'est-à-dire le point tel que $A'B + A'C + A'D = \vec{0}$. Le point G est défini par $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.

- Montre que $\vec{AA'} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.
- En déduire que G appartient au segment $[AA']$ et que $AG = \frac{3}{4}AA'$.
- Soit B' le centre de gravité du triangle ACD. Montre de même que G appartient à $[BB']$. Que peut-on en conclure ?

22 Base de l'espace et coordonnées ★★★

Dans un repère de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}(1 ; 2 ; 0)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(1 ; 0 ; 2)$ et $\vec{t}(3 ; 3 ; 5)$.

- Montre que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
- Détermine les coordonnées de $\vec{t}$ dans cette base.

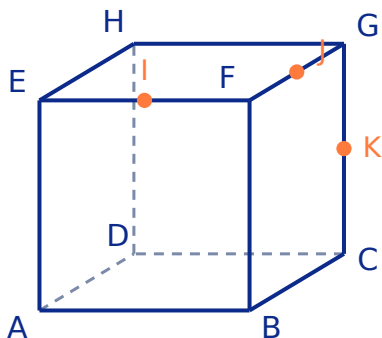
23 Les diagonales d'un parallélépipède ★★★

ABCDEFGH est un parallélépipède (les faces sont des parallélogrammes) avec $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ non coplanaires. On note $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$, $\vec{w} = \vec{AE}$.

- Exprime $\vec{AG}$, $\vec{BH}$, $\vec{CE}$ et $\vec{DF}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- Soit M le milieu de $[AG]$. Montre que M est aussi le milieu de $[BH]$, de $[CE]$ et de $[DF]$.

24 Section d'un cube par un plan ★★★

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[FG]$ et K le milieu de $[CG]$. On munit l'espace du repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- Donne les coordonnées de I, J, K et celles des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$. Les points I, J, K

sont-ils alignés ?

- b. Soient L le milieu de $[CD]$, M le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[AE]$. Montre que L , M et N appartiennent au plan (IJK) .
- c. Construis la section du cube par le plan (IJK) et nomme-la.