

Vecteurs et repère

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Parallélogramme : vrai ou faux ? ★★★

- Vrai** : dans un parallélogramme ABCD, les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, de même longueur et orientés dans le même sens.
- Faux** : $\vec{AD} = \vec{BC}$. Le vecteur $\vec{CB}$ est l'opposé de $\vec{BC}$, donc $\vec{AD} = -\vec{CB}$.
- Faux** : $\vec{CD}$ est l'opposé de $\vec{DC} = \vec{AB}$, donc $\vec{CD} = -\vec{AB}$. Ils ont même direction et même norme, mais des sens contraires.
- Faux** : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont des directions différentes (sauf cas aplati), donc les vecteurs ne sont pas égaux.
- Vrai** : c'est la règle du parallélogramme.

2 Lire des coordonnées ★★★

Lecture : $A(-3 ; -1)$, $B(1 ; 2)$, $C(2 ; -2)$, $D(-2 ; 3)$.

- $\vec{AB}(1 - (-3) ; 2 - (-1)) = (4 ; 3)$.
 $\vec{CD}(-2 - 2 ; 3 - (-2)) = (-4 ; 5)$.
 $\vec{BC}(2 - 1 ; -2 - 2) = (1 ; -4)$.
- Le repère est orthonormé : $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

3 Coordonnées et norme ★★★

- $\vec{AB}(5 - 2 ; 3 - (-1)) = (3 ; 4)$. Norme : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
- $\vec{MN}(1 - (-3) ; -2 - 4) = (4 ; -6)$.
- $\vec{PQ}(-4 - 0 ; 5 - 5) = (-4 ; 0)$. C'est un vecteur horizontal, de norme 4.

4 Compléter avec Chasles ★★★

- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (Chasles).
- $\vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} = \vec{MP} + \vec{PQ} = \vec{MQ}$.
- $\vec{EF} + \vec{FE} = \vec{EE} = \vec{0}$.
- $\vec{RS} + \vec{ST} = \vec{RT}$.
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0}$: on revient au point de départ.

5 Opérations sur des vecteurs donnés ★★★

- a. $\vec{u} + \vec{v}(3 + (-1) ; -2 + 4) = (2 ; 2)$.
- b. $2\vec{u}(2 \times 3 ; 2 \times (-2)) = (6 ; -4)$.
- c. $\vec{u} - \vec{v}(3 - (-1) ; -2 - 4) = (4 ; -6)$.
- d. $3\vec{u}(9 ; -6)$ et $-2\vec{v}(2 ; -8)$, donc $3\vec{u} - 2\vec{v}(9 + 2 ; -6 - 8) = (11 ; -14)$.

6 Milieux ★★★

- a. Milieu de $[AB] : ((-2 + 6)/2 ; (5 + 1)/2) = (4/2 ; 6/2) = (2 ; 3)$.
- b. Milieu de $[CD] : ((0 + 7)/2 ; (-3 + 4)/2) = (3,5 ; 0,5)$.

7 Colinéaires ou non ? ★★★

On calcule le déterminant $xy' - x'y$.

- a. $2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0$: **colinéaires** (on a $\vec{v} = 3\vec{u}$).
- b. $4 \times 3 - (-8) \times (-1) = 12 - 8 = 4 \neq 0$: **non colinéaires**.
- c. $1,5 \times 2 - (-1) \times (-3) = 3 - 3 = 0$: **colinéaires** (on a $\vec{v} = -2/3\vec{u}$).

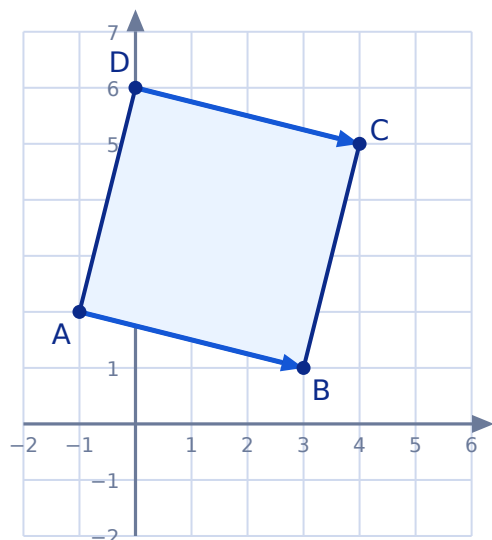
8 Quatrième sommet d'un parallélogramme ★★★

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$\vec{AB}(3 - (-1) ; 1 - 2) = (4 ; -1)$. Notons $D(x ; y) : \vec{DC}(4 - x ; 5 - y)$.

L'égalité donne $4 - x = 4$ et $5 - y = -1$, donc $x = 0$ et $y = 6$: **D(0 ; 6)**.

Vérification : le milieu de $[AC]$ est $((-1 + 4)/2 ; (2 + 5)/2) = (1,5 ; 3,5)$ et celui de $[BD]$ est $((3 + 0)/2 ; (1 + 6)/2) = (1,5 ; 3,5)$. Les diagonales ont le même milieu : c'est bien un parallélogramme.



9 Image d'un triangle par une translation ★★★

- a. Si M' est l'image de M , alors $\vec{MM'} = \vec{u}$, donc les coordonnées de M' sont celles de M augmentées de $(-3 ; 2)$.
 $A'(1 - 3 ; 4 + 2) = (-2 ; 6)$; $B'(-2 - 3 ; -1 + 2) = (-5 ; 1)$; $C'(0 - 3 ; 0 + 2) = (-3 ; 2)$.
- b. $\vec{AB}(-2 - 1 ; -1 - 4) = (-3 ; -5)$. $\vec{A'B'}(-5 - (-2) ; 1 - 6) = (-3 ; -5)$. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées : $\vec{A'B'} = \vec{AB}$. Donc $A'B' = AB$: la translation conserve les longueurs.

10 Colinéarité avec un paramètre ★★★

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 3 \times 10 - (-6)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow 30 + 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow 6m = -36 \Leftrightarrow$
 $m = -6$.

Alors $\vec{u}(3 ; -5)$ et $\vec{v}(-6 ; 10)$. Comme $-6 = -2 \times 3$ et $10 = -2 \times (-5)$, on a $\vec{v} = -2\vec{u}$.

11 Points alignés ? ★★★

- a. $\vec{AB}(3 ; 2)$ et $\vec{AC}(9 ; 6)$. Déterminant : $3 \times 6 - 9 \times 2 = 18 - 18 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires, donc A, B et C sont **alignés** (on a $\vec{AC} = 3\vec{AB}$).
- b. $\vec{AB}(3 ; 2)$ et $\vec{AD}(6 ; 5)$. Déterminant : $3 \times 5 - 6 \times 2 = 15 - 12 = 3 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B et D ne sont **pas alignés**.

12 Un trapèze ? ★★★

- a. $\vec{AB}(8 ; 4)$ et $\vec{CD}(2 ; 1)$. Déterminant : $8 \times 1 - 2 \times 4 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires donc $(AB) \parallel (CD)$.
- b. Un parallélogramme ABDC vérifierait $\vec{AB} = \vec{CD}$. Or $\vec{AB}(8 ; 4) \neq \vec{CD}(2 ; 1)$ (en fait $\vec{AB}$

= $4\vec{CD}$). $ABDC$ n'est donc **pas** un parallélogramme : c'est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ (avec $AB = 4 CD$).

13 Simplifier des écritures vectorielles ★★★

- a. $E = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.
- b. $F = \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{AC} = \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$.
- c. $G = 2\vec{AB} + 2\vec{AC} - \vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{AB} + 5\vec{AC}$.

14 Bateau et courant ★★★

- a. $\vec{p} + \vec{c}(4 + 1 ; 3 + (-2)) = (5 ; 1)$.
- b. Norme : $\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5,1 \text{ km/h}$.
- c. $\|\vec{p}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ km/h}$. Comme $\sqrt{26} \approx 5,1 > 5$, le courant fait gagner un tout petit peu de vitesse (environ $0,1 \text{ km/h}$), mais il dévie surtout la trajectoire.

Phrase réponse : la vitesse réelle est $(5 ; 1)$, soit environ $5,1 \text{ km/h}$.

15 Nature d'un triangle ★★★

$\vec{AB}(4 ; 3)$ donc $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$. $\vec{AC}(3 ; -4)$ donc $AC = \sqrt{9 + 16} = 5$. $\vec{BC}(-1 ; -7)$ donc $BC = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$.

$AB = AC$: le triangle est isocèle en A. De plus $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en A.

Conclusion : ABC est rectangle isocèle en A.

16 Un parallélogramme à construire ★★★

$ABCD$ est un parallélogramme, donc $\vec{AB} = \vec{DC}$. Par définition de E, $\vec{AB} = \vec{BE}$. On en déduit $\vec{DC} = \vec{BE}$.

L'égalité $\vec{DC} = \vec{BE}$ signifie que $DCEB$ est un parallélogramme (on lit les sommets D, C, puis E, puis B).

17 Médiane et centre de gravité ★★★

- a. $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
- b. $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$.
 $\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{AG} = -\vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{3}(-2\vec{u} + \vec{v})$.
 $\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{AG} = -\vec{v} + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{3}(\vec{u} - 2\vec{v})$.
- c. $\vec{GA} = -\vec{AG} = \frac{1}{3}(-\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{GB} = -\vec{BG} = \frac{1}{3}(2\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{GC} = -\vec{CG} = \frac{1}{3}(-\vec{u} + 2\vec{v})$.

Somme : $\frac{1}{3}[(-\vec{u} - \vec{v}) + (2\vec{u} - \vec{v}) + (-\vec{u} + 2\vec{v})] = \frac{1}{3}[(-1 + 2 - 1)\vec{u} + (-1 - 1 + 2)\vec{v}] = \frac{1}{3} \times \vec{0} = \vec{0}$.

(G est le centre de gravité du triangle ABC : les trois médianes passent par G.)

18 Droite des milieux ★★★

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$ (Chasles). I milieu de $[AB]$: $\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$. J milieu de $[AC]$: $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

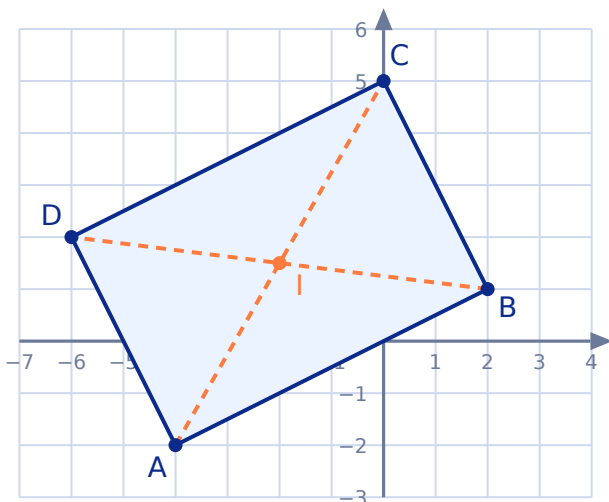
Donc $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BA}) = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

Conclusion : $\vec{IJ}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires, donc $(IJ) \parallel (BC)$. De plus $IJ = \frac{1}{2} BC$ (norme de $\frac{1}{2}\vec{BC}$).

19 Un rectangle caché ★★★

- $\vec{AB}(6 ; 3)$. Avec $D(x ; y)$, $\vec{DC}(0 - x ; 5 - y)$. $\vec{AB} = \vec{DC}$ donne $-x = 6$ et $5 - y = 3$, donc $x = -6$ et $y = 2$: **$D(-6 ; 2)$** .
- I est le milieu de $[AC]$: $((-4 + 0)/2 ; (-2 + 5)/2) = (-2 ; 1,5)$. C'est aussi le milieu de $[BD]$: $((2 - 6)/2 ; (1 + 2)/2) = (-2 ; 1,5)$. ✓
- $\vec{AC}(4 ; 7)$ donc $AC = \sqrt{(16 + 49)} = \sqrt{65}$. $\vec{BD}(-8 ; 1)$ donc $BD = \sqrt{(64 + 1)} = \sqrt{65}$. Les diagonales ont la même longueur.

Conclusion : un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle : ABCD est un rectangle. (Contrôle : $\vec{AB}(6 ; 3)$ et $\vec{AD}(-2 ; 4)$ donnent $AB^2 + AD^2 = 45 + 20 = 65 = BD^2$ ✓.)



20 Un point défini par une combinaison ★★★

$\vec{AB}(2 ; -3)$ et $\vec{AC}(-3 ; -2)$.

$2\vec{AB}(4 ; -6)$ et $-3\vec{AC}(9 ; 6)$, donc $2\vec{AB} - 3\vec{AC}(4 + 9 ; -6 + 6) = (13 ; 0)$.

Avec $M(x ; y) : \vec{AM}(x - 1 ; y - 2) = (13 ; 0)$, donc $x = 14$ et $y = 2$.

M(14 ; 2).

21 Alignement et paramètre ★★★

A, B, M sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AM}$ colinéaires. $\vec{AB}(3 ; 6)$ et $\vec{AM}(x - 2 ; -6)$.

Déterminant : $3 \times (-6) - (x - 2) \times 6 = -18 - 6x + 12 = -6 - 6x$. Il est nul si et seulement si $x = -1$.

Vérification : $\vec{AM}(-3 ; -6) = -\vec{AB}$. **$x = -1$.**

22 Trisection d'un segment ★★★

- a. $\vec{AB}(9 ; -3)$. $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}(3 ; -1)$, donc $K(-5 + 3 ; 2 - 1) = (-2 ; 1)$. $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AB}(6 ; -2)$, donc $L(-5 + 6 ; 2 - 2) = (1 ; 0)$.
- b. $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AL} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Par coordonnées : $\vec{KL}(1 - (-2) ; 0 - 1) = (3 ; -1) \checkmark$. De même $\vec{LB} = \vec{AB} - \vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Les trois vecteurs $\vec{AK}$, $\vec{KL}$ et $\vec{LB}$ sont égaux : les points K et L partagent le segment [AB] en trois parties égales.